

## مقایسه چهار مدل ضریب پراکنش در تحلیل ریاضی انتقال آلاینده‌ها در خاک‌های ناهمگن

فرشید تاران<sup>1\*</sup>، امیرحسین ناظمی<sup>2</sup> و علی اشرف صدرالدینی<sup>3</sup>

تاریخ دریافت: 90/09/05 تاریخ پذیرش: 91/10/17

<sup>1</sup> دانشجوی سابق کارشناسی ارشد، گروه مهندسی آب، دانشگاه تبریز

<sup>2</sup> استاد، گروه مهندسی آب، دانشگاه تبریز

<sup>3</sup> دانشیار، گروه مهندسی آب، دانشگاه تبریز

\* مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: [farshidtaran@gmail.com](mailto:farshidtaran@gmail.com)

### چکیده

محیط‌های متخلخل موجود در طبیعت، ناهمگن هستند و ضریب پراکنش آلاینده در آنها ممکن است دارای تغییرات مکانی باشد. در این پژوهش ضریب پراکنش به دو صورت ثابت و متغیر مکانی منظور شده است. ضریب پراکنش متغیر مکانی با سه نوع تابع خطی، توانی و نمایی تعریف و هر یک جداگانه در رابطه انتقال آلاینده وارد گردیده و مدل‌های به دست آمده با شرایط اولیه و مرزی دیریکله حل شده‌اند. برای مقایسه نتایج چهار مدل مذکور با یکدیگر از داده‌های آزمایشگاهی مربوط به تزریق پیوسته محلول کلرور سدیم در یک ستون 12/5 متری حاوی بافت‌های مختلف خاک استفاده شده است. منحنی‌های غلظت - مکان در زمان‌های مختلف، نشان داد که در زمان‌های اولیه پس از شروع تزریق، مدل خطی مطابقت بیشتری و مدل توانی مطابقت کمتری با داده‌های آزمایشگاهی دارد. با گذشت زمان، نتایج مدل توانی نسبت به دو مدل دیگر بهتر می‌شود. در مجموع، گذشت زمان مشابهت نتایج کلیه مدل‌ها را با نتایج آزمایشگاهی کاهش می‌دهد. با برآزش مقادیر ضریب پراکنش حاصل از آزمایش در نقاط مختلف طول ستون، ضریب تبیین مربوط به مدل‌های خطی، توانی و نمایی به ترتیب برابر با 0/501، 0/856 و 0/714 تخمین زده شد که نشان می‌دهد مدل‌های توانی و نمایی تخمین بهتری نسبت به مدل خطی دارند. در کلیه زمان‌ها نتایج مربوط به مدل با ضریب پراکنش ثابت نسبت به مدل‌های متغیر مکانی، تشابه کمتری با نتایج آزمایشگاهی نشان داد.

واژه‌های کلیدی: انتقال توده‌ای - پراکنش، شرط دیریکله، ضریب پراکنش ثابت، ضریب پراکنش متغیر مکانی

## Comparison of Four Dispersion Coefficient Models in Mathematical Analysis of Contaminant Transport in Heterogeneous Soils

F Taran<sup>1\*</sup>, A Nazemi<sup>2</sup> and AA Sadraddini<sup>3</sup>

Received: 26 November 2011 Accepted: 6 January 2013

<sup>1</sup>Ph.D Student, Dept. of Water Engin., Univ. of Tabriz, Iran

<sup>2</sup>Prof., Dept. of Water Engin., Univ. of Tabriz, Iran

<sup>3</sup>Assoc. Prof., Dept. of Water Engin., Univ. of Tabriz, Iran

\*corresspondin Author Email: [farshidtaran@gmail.com](mailto:farshidtaran@gmail.com)

### Abstract

Media found in nature are heterogeneous and contaminant dispersion coefficient in such media may have spatial variations. In this study, dispersion coefficient is presented in constant and spatially-varied forms. The spatially-varied dispersion coefficient has been defined by means of three types of linear, power and exponential functions and each of them has been entered separately in the transport equation and the obtained models are solved using the initial condition and Dirichlet boundary condition. For comparison of the models results, data of the continuous injection of sodium chloride ions in a 12.5m column containing different soil textures have been used. Concentration-location curves at different times showed that at early times after the injection dispersion coefficient of the linear model was more compatible with the experimental data and that of the power model was less compatible with them. With elapsing time, results of the power model were better than those of the two other models. In general, with increasing time the similarity between the results of models and experiments was reduced. By fitting dispersion coefficient values obtained from the experiments at different points of the column length, the coefficients of determination for the linear, power and exponential models were estimated as 0.501, 0.856 and 0.714, respectively. This showed that power and exponential models had better estimation than the linear model. At all times, results of the constant dispersion coefficient model had less similarity with the experimental results than the other models.

**Keywords:** Advection-dispersion transport, Constant dispersion coefficient, Dirichlet condition, Spatially-varied dispersion coefficient

است. به دلیل ماهیت ناهمگن محیط‌های طبیعی، پژوهش در مورد فرآیند انتقال در محیط‌های ناهمگن ضروری می‌باشد. جلوگیری از آلودگی خاک‌ها، مستلزم درک

مقدمه

درک بهتر فرآیند انتقال جرم در محیط‌های متخلخل برای ارزیابی آلودگی این محیط‌ها حایز اهمیت

در تمام طول مسیر کافی است (بیر 1972)، لیکن پژوهش‌های بعدی نشان داد چنین فرضی درست نمی‌باشد (پیکنز و گریساک 1981). حل رابطه انتقال چه با فرض ضریب پراکنش متغیر مکانی و چه با فرض ضریب پراکنش ثابت، نیازمند راه‌کارهای تحلیلی یا عددی است. روش‌های تحلیلی اغلب برای تایید و سنجش میزان صحت مدل‌های عددی به کار می‌روند. هر چند که حل تحلیلی این رابطه حتی در حالت یک بعدی پیچیدگی‌هایی دارد (کومار و همکاران 2009). رومر (1962) با فرض رابطه مستقیم بین ضریب پراکنش و سرعت جریان، یک حل تحلیلی برای رابطه انتقال ارائه داد. چن و همکاران (2008) با فرض ضریب پراکنش متغیر مکانی به صورت یک تابع هندلولی مجانبی، این رابطه را با روش تحلیلی حل نمودند. کومار و همکاران (2009) برای رابطه جریان توده‌ای-انتشار مولکولی با ضرایب متغیر در یک محیط نیمه محدود روش حل تحلیلی ارائه دادند.

در این پژوهش رابطه انتقال آلاینده در حالت یک بعدی به روش تحلیلی و با استفاده از شرط اولیه و شرط مرزی نوع اول یا دیریکله<sup>2</sup> حل شده است. ضریب پراکنش یک بار به صورت یک مقدار ثابت در تمام طول محیط فرض و در رابطه انتقال وارد شده است. بار دیگر با استفاده از سه نوع تابع متغیر نسبت به مکان تعریف و به طور جداگانه در رابطه مذکور وارد گردیده است. برای حل مدل‌ها از روش جداسازی متغیرها، سری‌های توانی و تبدیلات لاپلاس استفاده گردیده و برای نتیجه‌گیری و تعیین بهترین مدل، داده‌های آزمایشگاهی مربوط به کلور سدیم محلول در آب به کار رفته است.

مکانیزم انتقال جرم در محیط‌های متخلخل است. طی دو دهه گذشته، روش‌های متعددی برای تشخیص رفتار مواد در فرآیند حرکت در خاک‌های همگن توسعه داده شد (ویرنگا و ون گنوختن 1989، ون کلوستر و همکاران 1993)، لیکن قابلیت این مدل‌ها در پیش بینی رفتار جرم در محیط‌های غیرهمگن ناکارآمد بود. خاک‌های همگن، به ندرت در طبیعت یافت شده و تنها برای پژوهش‌های غیر دقیق درباره خاک مناسب هستند و نمی‌توان انتظار داشت رفتاری که در محیط‌های ناهمگن دیده می‌شود از این مطالعات نیز نتیجه گردد. در برخی مطالعات فرآیند انتقال در خاک‌های ناهمگن لایه‌ای مورد بررسی قرار گرفته (سلیم و همکاران 1977)، هر چند که در آنها هر لایه به صورت همگن منظور شده است. سودیکی و چری (1979) نشان دادند که میزان پخشیدگی یک آلاینده با فاصله از منبع آلاینده افزایش می‌یابد. با یک سری آزمایش میدانی، سائوتی (1980) دریافت که ضریب پراکنش ابتدا با فاصله افزایش می‌یابد تا این که در یک مقدار مشخص، ثابت باقی می‌ماند. برای پی بردن به تاثیر تغییر مکان بر ضریب پراکنش آلاینده، سیلمن و سیمپسون (1987) آزمایش‌هایی بر روی یک ستون شنی انجام دادند. خان و ژوری (1990) سه ستون خاک دست نخورده با طول‌های متفاوت و سه شدت جریان مختلف را برای هر ستون آزمون نمودند و نتیجه گرفتند که میزان پخشیدگی، با افزایش طول ستون فزونی قابل ملاحظه‌ای دارد. برنس (1996) با آزمایش بر روی یک ستون شنی، پی برد که ضریب پراکنش به تدریج با فاصله از منبع آلاینده افزایش می‌یابد. بر اساس این یافته‌ها رابطه موسوم به توده‌ای-پراکنش (ADE)<sup>1</sup> که برای توصیف چگونگی حرکت آلاینده‌ها در محیط‌های متخلخل استفاده می‌گردد، توسط بیتز (1990) با فرض ضریب پراکنش متغیر مکانی به کار گرفته شد. در پژوهش‌های اولیه اعتقاد بر این بود که فرض یک مقدار ثابت برای ضریب پراکنش

<sup>2</sup> Dirichlet<sup>1</sup> Advection-Dispersion Equation

## مواد و روش‌ها

رابطه کلی انتقال آلاینده در حالت یک بعدی، چنان که در شکل 1 برای یک ستون آزمایشگاهی نشان داده شده، به صورت زیر می‌باشد (چن و همکاران 2008):

$$R \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} - v_x \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \quad [1]$$

که در آن  $C$  غلظت آلاینده ( $ML^{-3}$ ) و  $R$  عامل تاخیر<sup>1</sup> (بدون بعد) است.  $R$  برای مواد بدون واکنش برابر مقدار واحد و برای مواد واکنش‌گر بزرگتر از یک می‌باشد.  $x$  موقعیت مکانی ماده آلاینده در محیط متخلخل ( $L$ )، زمان  $t$  ( $T$ )، سرعت متوسط جریان در جهت  $x$  ( $LT^{-1}$ ) و به حالت ماندگار و یکنواخت می‌باشد (سرعت از نوع داری می‌باشد).  $D_x$  نیز ضریب پراکنش طولی است که در این پژوهش یک بار به صورت یک مقدار ثابت و بار دیگر با استفاده از سه نوع تابع متغیر مکانی، تعریف و هر یک به طور جداگانه در رابطه انتقال منظور شده است. این سه نوع تابع به قرار زیر بوده است:

$$1- \text{ یک تابع خطی برحسب متغیر مکان: } D_x = ax + b$$

$$2- \text{ یک تابع توانی برحسب متغیر مکان: } D_x = ax^b$$

$$3- \text{ یک تابع نمایی برحسب متغیر مکان: } D_x = ae^{bx}$$

در توابع بالا  $a$  و  $b$  ضرایب ثابت و  $e$  عدد نپر می‌باشد.

انتخاب این سه تابع به این دلیل بوده است که پژوهشگران قبلی بیشتر به حل عددی این توابع پرداخته و نتایج به دست آمده از پژوهش‌های آنها در تطابق با نتایج آزمایش‌های صورت گرفته رضایت بخش بوده است. از طرفی مطابق آزمایش‌ها، ضریب پراکنش در یک محیط متخلخل ناهمگن ابتدا تا نقطه مشخصی تغییر نموده و سپس به یک مقدار ثابت می‌رسد که طبق نمودارهای موجود برای غلظت در طول یک محیط، هر سه تابع مذکور چنین روندی را می‌توانند نشان دهند. مدل‌های به دست آمده از جایگزینی توابع مذکور در

رابطه 1، با استفاده از شرایط اولیه و مرزی زیر به صورت تحلیلی حل شدند.

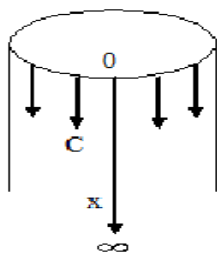
شرایط اولیه و مرزی:

$$C(x, t = 0) = 0 \quad [2]$$

$$C(x = 0, t) = C_0 \quad [3]$$

$$\frac{\partial C(x = L, t)}{\partial x} = 0 \quad [4]$$

$C_0$  غلظت آلاینده در مرز ورودی محیط متخلخل و  $L$  طول محیط متخلخل مشخص و مورد نظر است. رابطه 3 به شرط مرزی نوع اول یا شرط دیریکله موسوم است.



شکل 1- انتقال یک بعدی جرم در یک محیط متخلخل به صورت یک ستون پیوسته.

## مدل‌های ریاضی

اگر ضریب پراکنش به صورت یک مقدار ثابت و یک تابع متغیر مکانی خطی، توانی و نمایی در رابطه 1 وارد شود، به ترتیب روابط 5، 6، 7 و 8 را خواهیم داشت:

$$R \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} - v_x \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \quad [5]$$

$$R \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = (ax + b) \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial(ax+b)}{\partial x} - v \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \quad [6]$$

$$R \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = ax^b \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial(ax^b)}{\partial x} - v \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \quad [7]$$

$$R \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = ae^{bx} \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial(ae^{bx})}{\partial x} - v \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \quad [8]$$

با کاربرد روش‌های جداسازی متغیرها، سری-های توانی و تبدیلات لاپلاس، حل روابط 5، 6، 7 و 8 با استفاده از شرایط کمکی در روابط 2 تا 4 به ترتیب

<sup>1</sup> Retardation factor

مختلف به طور غیرهمگن و از بافت درشت به بافت ریز در جهت جریان (به ترتیب سنگریزه، شن درشت، شن متوسط، شن ریز و خاک رسی) پر نمودند. در فواصل 100 سانتی متری ستون، الکترودهایی برای اندازه گیری شوری جریان نصب و قبل از شروع آزمایش، ستون به مدت 3 روز با آب اشباع شد. سرعت جریان، سرعت منفذی ( $k_s$ ) بود و به طور ثابت منظور شد. ماده مورد استفاده، محلول کلرور سدیم (به عنوان آلاینده) با غلظت اولیه 6 گرم بر لیتر بود که به صورت پیوسته به ستون تزریق شد. مدت زمان انجام آبتشویی 4 روز و شروع آن از زمانی بود که به طور تقریبی تمام ستون به غلظت اولیه (6 گرم بر لیتر) و یکنواخت رسید. در این مطالعه، مقادیر غلظت با استفاده از نرم افزار CXTFIT2.1 که بر اساس حل رابطه ADE می باشد، تخمین زده شده است. مقدار ضریب پراکنش ثابت نیز همان مقدار آن در شروع آزمایش و برابر 185 سانتی متر مربع در ساعت فرض شده که با در دست داشتن سرعت و غلظت اولیه با نرم افزار CXTFIT2.1 محاسبه گردید. اندازه گیری ها، غلظت آلاینده را در جریان عبوری از هر نقطه در طول ستون نشان می دهد و حل های تحلیلی نیز بر این اساس بوده است. کلرور سدیم یک ماده بدون واکنش بوده و عامل تاخیر آن برابر با واحد است.

### نتایج و بحث

#### تعیین ضرایب a و b

با کاربرد مقادیر ضریب پراکنش حاصل از آزمایش در نقاط 100، 200، ... تا 1200 سانتی متری و تعیین رابطه خط برازش شده به سه صورت خطی، توانی و نمایی، مقادیر a و b برای سه مدل متغیر مکانی به دست آمد. همان طور که در شکل های 2، 3 و 4 مشخص است، مقدار a برای مدل خطی، توانی و نمایی به ترتیب برابر با 7/582، 0/15 و 399/7 و مقدار b برای این سه مدل به ترتیب برابر با 167/7-، 1/568 و 0/003 می باشد. ضریب تبیین حاصل از برازش برای مدل

روابط 9، 10، 12 و 14 را نتیجه می دهد (روش حل در قسمت ضمیمه آمده است). این راهکارها برای غلظت آلاینده موجود در جریان در مکان ها و زمان های مختلف است.

$$C(x, t) = C_0 \left\{ 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{\alpha_m}{L} \exp\left(-\frac{\alpha_m^2 x}{2D_x}\right)}{\left(\frac{4D_x^2}{L^2} + \frac{\alpha_m^2}{8\alpha_m}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \cdot \exp\left(\frac{V}{2D_x} x - \frac{V^2}{4RD_x} t - \frac{\alpha_m^2 D_x}{L^2 R} t\right) \right\} \quad [9]$$

که در آن  $\alpha = \beta L$ ،  $\beta = \frac{\sqrt{4D_x \lambda^2 - V^2}}{2D_x}$  و  $\lambda$  ضریب ثابت مربوط به رابطه مشخصه در حل رابطه گفته شده است.

$$C(x, t) = C_0 \left[ 1 - \left( \frac{\cosh\left(\left(t\frac{L^2}{4} - \alpha\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\xi} - \frac{\sinh\left(\left(t\frac{L^2}{4} - \alpha\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right)}{\xi} \right) \frac{\eta}{(2\xi)} + \frac{(\beta - \eta)}{(\xi - \theta)} \right] \cdot \frac{\exp(\eta t)}{(2\xi)} \quad [10]$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \alpha &= 24(aL + b)^3, \\ \beta &= [12(aL + b)^2(x - L)^2 - 4(aL + b)(2a - v)(x - L)^3 + (2a - v)(3a - v)(x - L)^4]R, \\ \theta &= [(aL + b)(x - L)^4]R^2, \\ \eta &= [12(aL + b)^2L^2 + 4(aL + b)(2a - v)L^3 + (2a - v)(3a - v)BL^4]R, \\ \xi &= [(aL + b)L^4]R^2 \end{aligned} \quad [11]$$

$$C(x, t) = C_0 \left[ 1 + \frac{\gamma - \delta}{\delta \exp\left(\frac{\gamma}{\delta} t\right)} \right] \quad [12]$$

که در آن:

$$\lambda = 2aLb, \quad \gamma = [(x - L)^2]R, \quad \delta = [L^2]R \quad [13]$$

$$C(x, t) = C_0 \left[ 1 + \frac{\rho - \psi}{\psi \exp\left(\frac{\rho}{\psi} t\right)} \right] \quad [14]$$

که در آن:

$$\omega = 2ae^{bL}, \quad \rho = [(x - L)^2]R, \quad \psi = [L^2]R \quad [15]$$

داده های مورد استفاده

داده های مورد استفاده در این پژوهش، برگرفته از نتایج آزمایش هوانگ و همکاران (1994) در یک ستون 12/5 متری است. آنها ابتدا ستون را با خاک های

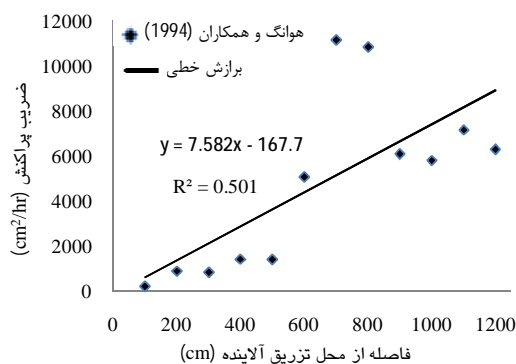
### نمودارهای غلظت - مکان

برای درک بهتر مساله، نمودارهای توزیع غلظت در نقاط مختلف از طول ستون آزمایشگاهی در زمان-های 1، 20 و 40 ساعت پس از شروع فرآیند تزریق آلاینده (محلول کلرور سدیم با غلظت 6 گرم بر لیتر به مدت 4 روز تزریق شده است) به ترتیب در شکل‌های 5 (الف، ب و پ) رسم شده است. در زمان 1 ساعت، مدل خطی ضریب پراکنش، نزدیک‌ترین نتایج را به داده‌های آزمایشگاهی دارد. پس از مدل خطی، مدل‌های نمایی و توانی به ترتیب دارای نزدیک‌ترین برازش با داده‌های آزمایشگاهی هستند و همان‌طور که انتظار می‌رفت، در این بین، مدل با ضریب پراکنش ثابت کم‌ترین مشابهت را با نتایج آزمایشگاهی دارد، زیرا داده‌های آزمایشگاهی، مربوط به یک محیط ناهمگن هستند، حال آن که ضریب پراکنش ثابت، در محیط‌های همگن منظور می‌گردد.

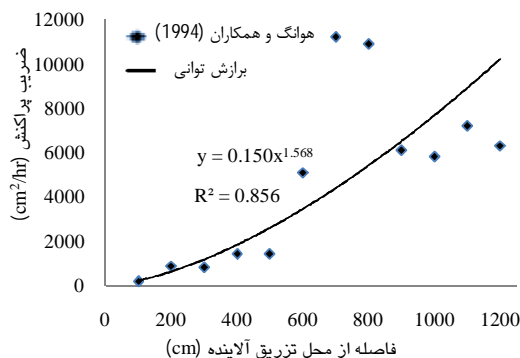
در زمان 20 ساعت، برای کلیه مدل‌ها، کاهش مشابهت نسبت به زمان قبل مشاهده می‌گردد، لیکن نکته قابل توجه این است که مدل توانی که در زمان 1 ساعت کم‌ترین مشابهت را در بین مدل‌های متغیر مکانی، با داده‌های آزمایشگاهی داشت، این بار بیشترین مشابهت را داشته و مدل‌های نمایی و خطی در رتبه‌های بعدی قرار گرفته‌اند. مدل با ضریب پراکنش ثابت نیز نتایج نامطلوب‌تری نسبت به زمان 1 ساعت نشان داده و نمودار آن بسیار متفاوت از نمودار مربوط به داده‌های آزمایشگاهی است. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود تا حدود 10 متری ستون آزمایشگاهی، غلظت به دست آمده از این مدل برابر با غلظت اولیه بوده و هیچ‌گونه کاهشی در آن مشاهده نمی‌شود.

در زمان 40 ساعت، باز هم کاهش مشابهت در تمامی مدل‌ها وجود دارد، لیکن دیگر تغییری در ترتیب میزان مشابهت مدل‌ها به چشم نمی‌خورد و همچنان مدل توانی بهترین برازش را با داده‌های آزمایشگاهی دارد. همچنین نمودار مربوط به مدل با ضریب پراکنش

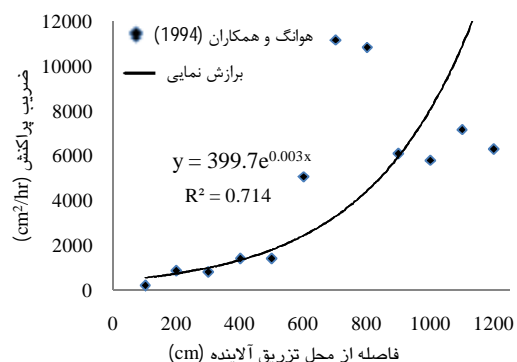
توانی بیشتر از دو مدل دیگر و برابر با 0/856 به دست آمد. برای برازش نمایی و خطی نیز ضریب تبیین به ترتیب برابر با 0/714 و 0/501 شد.



شکل 2- برازش خطی مقادیر ضریب پراکنش در نقاط مختلف.



شکل 3- برازش توانی مقادیر ضریب پراکنش در نقاط مختلف.



شکل 4- برازش نمایی مقادیر ضریب پراکنش در نقاط مختلف.

بسیاری از آزمایش‌ها نشان داده‌اند که ضریب پراکنش با افزایش فاصله از منبع تزریق آلاینده ابتدا تغییر می‌کند و سپس به یک مقدار مشخص می‌رسد (چن و همکاران، 2008). در این پژوهش نیز همان‌طور که در شکل 5 مشخص است سه مدل متغیر مکانی به کار رفته برای ضریب پراکنش این روند را به خوبی نشان می‌دهند.

نتایج به دست آمده از مدل‌های حل شده برای ضریب پراکنش ثابت در این پژوهش و همچنین پژوهش انجام گرفته توسط میشر و پارکر (1990)، ناکارآمدی این مدل را در محیط‌های ناهمگن تایید می‌کند. در این پژوهش، نشان داده شد که در محیط‌های ناهمگن، استفاده از مدل‌های متغیر مکانی برای ضریب پراکنش نتایج بسیار مطلوب‌تری در مقایسه با مدل ثابت ضریب پراکنش به دست می‌دهند که تحقیق پانگ و هانت (2001)، ژو (2002) و چامخا (2007) صحت و سقم نتایج پژوهش حاضر را نشان می‌دهد.

#### مقایسه آماری مدل‌ها

برای مقایسه میزان تطابق نتایج مدل‌های مورد بحث، از دو آماره ضریب تبیین<sup>1</sup> ( $R^2$ ) و جذر میانگین مربعات خطا<sup>2</sup> (RMSE) استفاده شده است. روابط 16 و 17 به ترتیب این دو آماره را نشان می‌دهند (رضایی، 1386).

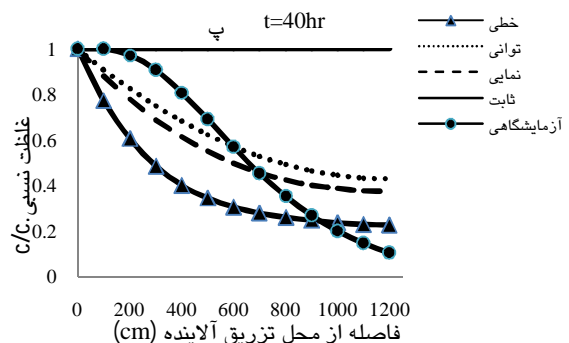
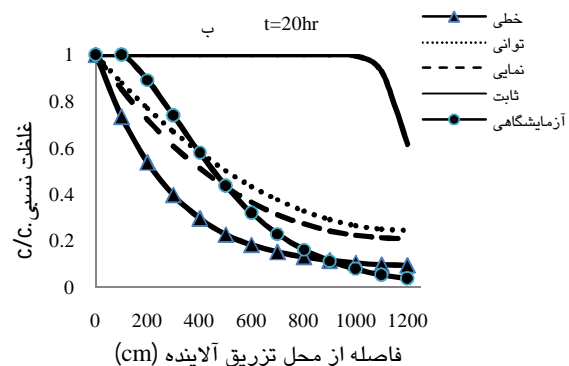
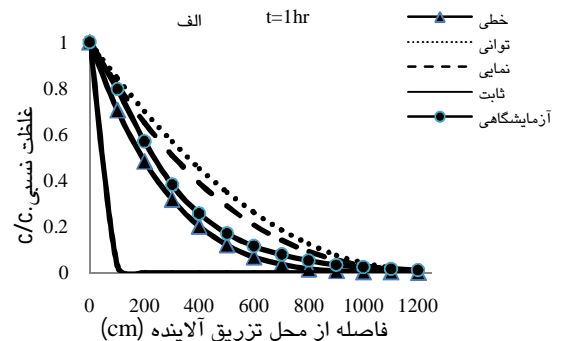
$$R^2 = \frac{[\sum(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})]^2}{\sum(X-\bar{X})^2 \sum(Y-\bar{Y})^2} \quad [16]$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum(X-Y)^2}{n}} \quad [17]$$

که در آن X مقدار محاسبه شده، Y مقدار آزمایشگاهی،  $\bar{X}$  و  $\bar{Y}$  میانگین مقادیر آنها و n تعداد داده‌ها می‌باشد.

در جداول 1 و 2 به ترتیب مقادیر این دو آماره برای سه مدل خطی، توانی و نمایی نشان داده شده

ثابت، به طور کامل تبدیل به یک خط راست موازی با محور xها (فاصله از محل تزریق) شده و از ابتدا تا انتهای طول محیط، غلظت آلاینده ثابت و برابر با غلظت اولیه می‌باشد و از این نظر کوچک‌ترین تشابهی با نمودار مربوط به داده‌های آزمایشی ندارد.



شکل 5- منحنی غلظت - مکان برای سه مدل خطی، توانی و نمایی ضریب پراکنش و مقدار ثابت آن در زمان‌های 1، 20 و 40 ساعت پس از تزریق آلاینده.

<sup>1</sup> Coefficient of determination

<sup>2</sup> Root Mean Square Error

دارد و در بین مدل‌های ناهمگن، مدل توانی دارای بیشترین مقدار است.

در زمان 20 ساعت، مقدار این آماره برای هر چهار مدل افزایش یافته است. البته مقدار این افزایش برای مدل ثابت بیشتر است. در بین مدل‌های متغیر مکانی نیز افزایش این آماره برای مدل خطی بیشتر از دو مدل دیگر می‌باشد. در این زمان  $RMSE$  مربوط مدل توانی کمتر و در مورد مدل ثابت بیشتر از سایر مدل‌ها است.

در زمان 40 ساعت نیز مقدار آماره مزبور در هر چهار مدل با افزایش همراه است. لیکن در این زمان مدل ثابت بیشترین و مدل توانی کمترین مقدار را به خود اختصاص داده‌اند.

#### جدول 1- ضرایب تبیین مدل‌ها.

زمان (hr)	ضریب تبیین ( $R^2$ )		
	خطی	توانی	نمایی
1	0/993	0/949	0/975
20	0/824	0/978	0/959
40	0/695	0/898	0/852

#### جدول 2- جذر میانگین مربعات خطای مدل‌ها.

زمان (hr)	جذب میانگین مربعات خطا ( $RMSE$ ) (-)		
	خطی	توانی	نمایی
1	0/049	0/113	0/073
20	0/190	0/138	0/120
40	0/245	0/163	0/173

#### نتیجه‌گیری کلی

نتایج را به شرح زیر می‌توان خلاصه نمود:

1- در کلیه زمان‌ها پس از تزریق آلاینده، مدل با ضریب پراکنش ثابت در تخمین مقادیر غلظت در مکان‌های مختلف، ضعیف‌تر از مدل‌های با ضریب پراکنش متغیر مکانی عمل می‌کند. از این نظر می‌توان نتیجه گرفت که در محیط‌های ناهمگن، ضریب پراکنش دارای

است. بزرگ‌تر بودن مقدار  $R^2$  یا کوچک‌تر بودن مقدار  $RMSE$  مربوط به یک مدل، بیانگر برتری آن مدل نسبت به مدل‌های دیگر می‌باشد.

در جدول 1 ملاحظه می‌گردد که در زمان 1 ساعت پس از تزریق، مدل خطی بیشترین و مدل ثابت کمترین ضریب تبیین را دارد. در بین سه مدل مربوط به محیط ناهمگن نیز ضریب تبیین مدل توانی کمتر از دو مدل دیگر می‌باشد. از این نظر در این زمان، مدل خطی نتایج بهتر و مدل ثابت نتایج نامطلوب‌تری نسبت به سایر مدل‌ها دارد و در بین مدل‌های متغیر مکانی نیز بدترین نتایج مربوط به مدل توانی بوده است.

در زمان 20 ساعت، ضریب تبیین مدل‌های خطی، نمایی و ثابت کاهش یافته، لیکن بر ضریب تبیین مدل توانی افزوده شده است و بیشترین مقدار مربوط به این مدل است. کمترین مقدار نیز همچنان مربوط به مدل ثابت می‌باشد. در این زمان مدل خطی که در زمان قبلی بیشترین ضریب تبیین را داشت، این بار کمترین مقدار را در بین مدل‌های متغیر مکانی دارد و نسبت به دو مدل دیگر کاهش چشمگیری داشته است و تخمین نامطلوب‌تری دارد.

در زمان 40 ساعت، ضریب تبیین برای هر چهار مدل با کاهش همراه است، لیکن ترتیب آنها در زمان قبلی حفظ شده و از نظر بیشتر بودن این ضریب، پس از مدل توانی، به ترتیب مدل‌های نمایی، خطی و ثابت قرار دارند. نکته قابل ذکر این است که مقدار ضریب تبیین برای مدل ثابت برابر با صفر بوده است و این بدین معنی است که در زمان 40 ساعت، هیچ تشابهی بین نتایج این مدل با نتایج آزمایشگاهی وجود ندارد. موردی که از نمودار 4- پ نیز قابل تشخیص است.

در جدول 2 مشاهده می‌شود که در زمان 1 ساعت پس از شروع تزریق، مدل خطی کمترین و مدل ثابت بیشترین مقدار میانگین مجذور مربعات خطا را



3- با گذشت زمان، نتایج دو مدل نمایی و توانی برای توزیع غلظت در طول محیط بهتر از مدل خطی می‌شود. پیشنهاد می‌گردد در مواردی که مدت زمان تزریق به طور نسبی زیاد است از این دو مدل استفاده گردد.

باید توجه داشت که در این جا به رغم اعمال دقت زیاد، فرآیند انتقال و پخشیدگی به صورت ماکروسکوپی بررسی شده است.

تغییرات مکانی بوده و پیشنهاد می‌شود از مدل با ضریب پراکنش ثابت در این گونه محیطها استفاده نشود.

2- در زمانهای اولیه، توزیع غلظت به دست آمده از مدل خطی ضریب پراکنش متغیر مکانی در نقاط مختلف، در مقایسه با توابع نمایی و توانی به نتایج آزمایشگاهی نزدیکتر است و پیشنهاد می‌شود در مواردی که مدت زمان تزریق به طور نسبی کم (کمتر از چند ساعت) می‌باشد، از این مدل در رابطه انتقال آلاینده استفاده گردد.

#### ضمیمه

در این جا حل رابطه انتقال با ضریب پراکنش متغیر مکانی به صورت تابع خطی (رابطه 6) به عنوان نمونه آورده شده است. حل رابطه انتقال با ضریب پراکنش متغیر مکانی به صورت توابع توانی و نمایی (به ترتیب روابط 7 و 8) به طور کامل مشابه حل رابطه 6 است. همچنین حل رابطه انتقال با ضریب پراکنش ثابت آورده شده است.

با قرار دادن  $ax + b$  به جای  $D_x$  در رابطه 1، این رابطه به صورت زیر درمی‌آید (چامخا 2007):

$$R \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = (ax + b) \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial(ax+b)}{\partial x} - v \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \quad [1-الف]$$

با ساده کردن رابطه 1- الف و فاکتورگیری از عبارت  $\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}$  داریم:

$$R \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = (ax + b) \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} + (a - v) \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \quad [2-الف]$$

با فرض  $A = a - v$  داریم:

$$R \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = (ax + b) \frac{\partial^2 C(x,t)}{\partial x^2} + A \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} \quad [3-الف]$$

در رابطه 3- الف از تبدیلات لاپلاس استفاده کرده و نسبت به  $t$  لاپلاس می‌گیریم:

$$R\{sU(x, s) - C(x, t = 0)\} = (ax + b)U''(x, s) + AU'(x, s) \quad [4-الف]$$

با اعمال رابطه 2 در رابطه 4- الف و فرض  $B = Rs$  و  $U(x, s) = U(x)$  و قرار دادن  $L$  به جای  $x$  خواهیم داشت:

$$(aL + b)U''(L) + AU'(L) - BU(L) = 0 \quad [5-الف]$$

اگر در رابطه 4 از تبدیلات لاپلاس استفاده کنیم (نسبت به  $t$  لاپلاس بگیریم) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial U(x=L, s)}{\partial x} = 0 \quad \text{یا} \quad U'(L) = 0 \quad [6-الف]$$

با قرار دادن رابطه 6- الف در رابطه 5- الف داریم:

$$U''(L) = \frac{B}{aL+b} U(L) \quad [7-الف]$$

از رابطه 5- الف نسبت به  $x$  یک بار مشتق گرفته<sup>1</sup> و با توجه به روابط 6- الف و 7- الف و جایگذاری  $L$  به جای  $x$  داریم:

<sup>1</sup> در این جا دلیل یک یا چند بار مشتق گرفتن آن است که بتوانیم از فرم کلی روش لیبتیز-مک لورن استفاده نماییم. مرتبه مشتقگیری بستگی به میزان دقتی دارد که در حل یک رابطه انتظار می‌رود.

$$U'''(L) = -\frac{a+A}{aL+b} U''(L) = -\frac{(a+A)B}{(aL+b)^2} U(L) \quad [8-الف]$$

این بار از رابطه 5-الف نسبت به  $x$  دو بار مشتق می‌گیریم و به جای  $L$  قرار می‌دهیم:

$$U^{(4)}(L) = \frac{(aL+b)B^2 + (a+A)(2a+A)B}{(aL+b)^3} U(L) \quad [9-الف]$$

با استفاده از راهکار لیبتیز-مک لورن<sup>1</sup> (نیکوکار 1385) و کاربرد پنج جمله اول سری مک لورن، داریم:

$$U(x) = U(L) + (x-L)U'(L) + \frac{(x-L)^2}{2}U''(L) + \frac{(x-L)^3}{6}U'''(L) + \frac{(x-L)^4}{24}U^{(4)}(L) \quad [10-الف]$$

با جایگذاری روابط 6-الف تا 9-الف در رابطه 10-الف،  $U(x)$  به شکل زیر به دست می‌آید:

$$U(x) = U(L) \left\{ \frac{24(aL+b)^3 + 12(aL+b)^2 B(x-L)^2 - 4(aL+b)(a+A)B(x-L)^3 + (aL+b)B^2(x-L)^4 + (a+A)(2a+A)B(x-L)^4}{24(aL+b)^3} \right\} \quad [11-الف]$$

اگر در رابطه 3 از تبدیلات لاپلاس استفاده کرده و نسبت به  $t$  لاپلاس بگیریم، داریم:

$$U(x=0, s) = \frac{C_0}{s} \quad \text{یا} \quad U(0) = \frac{C_0}{s} \quad [12-الف]$$

با اعمال رابطه 12-الف در 11-الف و ساده‌سازی داریم:

$$U(x) = C_0 \frac{24(aL+b)^3 + [12(aL+b)^2(x-L)^2 - 4(aL+b)(a+A)(x-L)^3 + (a+A)(2a+A)(x-L)^4]Rs + [(aL+b)(x-L)^4]R^2 s^2}{[24(aL+b)^3]s + [12(aL+b)^2L^2 + 4(aL+b)(a+A)L^3 + (a+A)(2a+A)BL^4]Rs^2 + [(aL+b)L^4]R^2 s^3} \quad [13-الف]$$

حال باید در رابطه 13-الف از معکوس تبدیلات لاپلاس استفاده کرده و نسبت به  $s$  لاپلاس معکوس بگیریم تا  $C(x, t)$  به-

دست آید (اسمعیلی 1383):

$$C(x, t) = C_0 \left[ 1 - \left( \frac{\cosh\left(\left(t\left(\frac{\eta^2}{4} - \alpha\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right)/\xi\right) - (\xi \cdot \sinh\left(\left(t\left(\frac{\eta^2}{4} - \alpha\xi\right)^{\frac{1}{2}}\right)/\xi\right)(\eta/(2\xi) + (\beta - \eta)/(\xi - \theta))\right)}{\left(\frac{\eta^2}{4} - \alpha\xi\right)^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot (\xi - \theta) \right] / (\xi \cdot \exp((\eta t)/(2\xi))) \quad [14-الف]$$

### حل تحلیلی رابطه انتقال آلاینده با ضریب پراکنش ثابت (5)

با استفاده از روش جداسازی متغیرها داریم (شفیعی موسوی و کدخدایی 1364):

$$C(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = X(x) \cdot T'(t), \quad \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} = X'(x) \cdot T(t), \quad \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t) \quad [1-ت]$$

$$R \cdot X(x) \cdot T'(t) = D_x \cdot X''(x) \cdot T(t) - V \cdot X'(x) \cdot T(t) \quad [2-ت]$$

در رابطه بالا بیشترین درجه مشتق دو بوده و این رابطه مساوی با مقدار ثابت  $-\lambda^2$  است:

$$R \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = D_x \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} - V \cdot \frac{X'(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad [3-ت]$$

$$R \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2, \quad D_x \cdot \frac{X''(x)}{X(x)} - V \cdot \frac{X'(x)}{X(x)} = -\lambda^2 \quad [4-ت]$$

با توجه به رابطه مشخصه روابط موجود در 4-ت،  $T(t)$  و  $X(x)$  حاصل می‌گردد (نیکوکار 1385):

$$T(t) = A_1 \cdot \exp\left(-\frac{\lambda^2}{R} t\right), \quad X(x) [A_2 \cdot \cos \beta x + A_3 \cdot \sin \beta x] \exp\left(\frac{V}{2D_x} x\right) \quad [5-ت]$$

که  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  مقادیر ثابت هستند و  $\beta = \frac{\sqrt{4D_x\lambda^2 - V^2}}{2D_x}$  می‌باشد.

حال با توجه به رابطه اول 1-ت و روابط موجود در 5-ت داریم:

$$C(x, t) = [B_1 \cdot \cos \beta x + B_2 \cdot \sin \beta x] \exp\left(\frac{V}{2D_x} x\right) \cdot \exp\left(-\frac{\lambda^2}{R} t\right) \quad [6-ت]$$

با اعمال شرایط مرزی،  $B_1$  به دست می‌آید:

$$B_1 = C_0 \cdot \exp\left(\frac{\lambda^2}{R} t\right) \quad [7-ت]$$

سپس با اعمال تغییر متغیر  $\alpha = \beta L$  و یک سری ساده سازی، خواهیم داشت:

<sup>1</sup> Leibnitz-Maclaurin

$$\alpha \cos \alpha + \frac{VL}{2D_x} \cdot \sin \alpha = 0 \quad \alpha \cot \alpha + \frac{VL}{2D_x} = 0 \quad [8-ت]$$

با فرض ریشه‌های مثبت رابطه بالا،  $\alpha_m$  را به جای  $\alpha$  قرار داده و با اعمال شرایط مرزی جدید زیر، خواهیم داشت (پیتز):

$$C_1(x, 0) = -C_0, \quad C_1(0, t) = 0, \quad \frac{\partial C_1(L, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad C(x, t) = C_1(x, t) + C_0 \quad [9-ت]$$

$$C_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \cdot \exp\left(\frac{V}{2D_x} x - \frac{\lambda^2}{R} t\right) \quad [10-ت]$$

$$B_m = -C_0 \frac{\int_0^L \exp\left(-\frac{V}{2D_x} x\right) \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) dx}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) dx} \quad [11-ت]$$

$$C_1(x, t) = -C_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{\alpha_m}{\frac{V^2}{4D_x^2} + \frac{\alpha_m^2}{L^2}} \right\}}{\left\{ \frac{L}{2} \frac{\sin 2\alpha_m}{8\alpha_m} \right\}} \cdot \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \cdot \exp\left(\frac{V}{2D_x} x - \frac{V^2}{4RD_x} t - \frac{\alpha_m^2 D_x}{L^2 R} t\right) \quad [12-ت]$$

در نهایت با توجه به رابطه آخر 9-ت و رابطه 12-ت رابطه مورد نظر به صورت زیر حاصل می‌گردد (شاه محمدی):

$$C(x, t) = C_0 \left\{ 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{\alpha_m}{\frac{V^2}{4D_x^2} + \frac{\alpha_m^2}{L^2}} \right\}}{\left\{ \frac{L}{2} \frac{\sin 2\alpha_m}{8\alpha_m} \right\}} \cdot \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \cdot \exp\left(\frac{V}{2D_x} x - \frac{V^2}{4RD_x} t - \frac{\alpha_m^2 D_x}{L^2 R} t\right) \right\} \quad [13-ت]$$

#### منابع مورد استفاده

- اسمعیلی ح. 1383. ریاضیات مهندسی. انتشارات دانشگاه بوعلی سینا همدان.
- رضایی ع، 1386. مفاهیم آمار و احتمالات. نشر مشهد.
- شاه محمدی کلالق ش، 1382. بررسی تحلیلی انتقال جرم در محیط‌های متخلخل. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تبریز.
- شفیعی موسوی م و کدخدایی ع، 1364. مبانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
- نیکوکار م، 1385. معادلات دیفرانسیل. انتشارات آزاده.
- Bear J, 1972. Dynamics of Fluids in Porous Media. Elsevier, New York.
- Burns E, 1996. Results of 2-dimensional sandbox experiments: Longitudinal dispersivity determination and seawater intrusion of coastal aquifers. Master's Thesis, Univ of Nev, Reno. USA.
- Chamkha A J, 2007. Numerical modeling of contaminant transport with spatially-dependent dispersion and non-Linear chemical reaction. Nonlinear Analysis: Modelling and Control 12(3): 329-343.
- Chen J.S, CF Liang, CP and Chiang CC, 2008. Analytical power series solution for contaminant transport with hyperbolic distance-dependent dispersivity. Journal of Hydrology 362: 142-149.
- Huang K, Toride V and Van Genuchten M.Th, 1994. Experimental investigation of solute transport in large, homogeneous and heterogeneous, saturated soil columns. Transport in Porous Media 18: 283-302.
- Khan AUH and Jury WA, 1990. A laboratory study of the dispersion scale effect in column outflow experiments. Journal of Contaminant Hydrology 5: 119-131.
- Kumar A, Kumar J and Naveen K, 2009. Analytical solutions to one-dimensional advection-diffusion equation with variable coefficients in semi-infinite media. Journal of Hydrology 380: 330-337.
- Mishra S and Parker JC, 1990. Analysis of solute transport with a hyperbolic scale-dependent dispersion model. Hydrological Processes 4: 45-57.
- Pang L and Hunt B, 2001. Solutions and verification of a scale-dependent dispersion model. Journal of Contaminant Hydrology 53: 21-39.
- Peter D, 1971. Fourier and Laplace transforms. Library of Mathematics, University of Sussex, London.
- Pickens JF and Grisak GE, 1981. Scale-dependent dispersion in a stratified granular aquifer. Water Resource Research 17(4):1191-1211.
- Rumer RR, 1962. Longitudinal dispersion in steady and unsteady flow. Journal of Hydraulics Division 88 (4): 147-172.
- Sauty JP, 1980. An analysis of hydrodispersive transfer in aquifers. Water Resource Research 16(1): 145-158.
- Scheidegger, A.E. 1957. The physics of flow through porous media. University of Toronto Press. Toronto.

- Selim HM, Davidson JM and Rao, PSC, 1977. Transport of reactive solutes through multilayered soils. *Soil Science Society of America Journal* 41: 3-10.
- Silliman SE and Simpson ES, 1987. Laboratory evidence of the scale effect in dispersion of solutes in porous media. *Water Resource Research* 23(8): 1667-1673.
- Sudicky EA and Chery JA, 1979. Field observations of tracer dispersion under natural flow conditions in an unconfined sandy aquifer. *Water Pollution Research Journal (Canada)* 14:1-17.
- Vanclooster M, Mallants D, Diels J and Feyen J, 1993. Determining local-scale solute transport parameters using time domain reflectometry (TDR). *Journal of Hydrology (Amsterdam)* 148:93-107.
- Wierenga PJ and van Genuchten M.Th, 1989. Solute transport through small and larger unsaturated soil columns. *Ground Water*. 27:35-42.
- Yates SR, 1990. An analytical solution for one-dimension transport in heterogeneous porous media. *Water Resource Research* 26: 2331-2338.
- Zhou L, 2002. Solute transport in layered and heterogeneous soils. Dissertation of Doctor of Philosophy, Department of Agronomy, Tsinghua University of Chinese, China.