نشریه دانش آب و خاک / جلد۲۴ شماره۲ صفحه‌های۱۲۱ تا ۱۳۳/ سال ۱۳۹۳

شبیه سازی بارش – رواناب با استفاده از تئوری سیستم گری (مطالعه موردی: حوضه آبریز لیقوان)

رضا مکاریان[۱*]، احمد فاخری فرد[۲] و محمد علی قربانی[۳]

تاریخ دریافت: ۹۰/۱۲/۰۲ تاریخ پذیرش: ۹۲/۰۶/۰۳

[۱]-دانشجوی سابق کارشناسی ارشد مهندسی منابع آب، گروه مهندسی آب، دانشگاه تبریز

[۲]-استاد، گروه مهندسی آب، دانشگاه تبریز

[۳]-دانشیار، گروه مهندسی آب، دانشگاه تبریز

* مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی : mokarian4561@ yahoo.com

چکیده

تئوری سیستم گری در پیش‌بینی وقایعی که دارای آمار مشاهداتی کمتری است با توجه به پایه ریاضی مدل، ایفای نقش می‌کند و در هیدرولوژی مشکل کمبود سابقه آماری داده‌ها را مرتفع می‌سازد. شبیه‌سازی فرآیند بارش – رواناب در این تحقیق با بهره گرفتن از تئوری سیستم گری به کمک نرم افزار *Mathematica* با استفاده از اطلاعات شش رویداد متناظر بارش- رواناب باران نگار (هیتوگراف) و هیدرومتری ایستگاه حوضه آبریز لیقوان تبریز مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. معادله مدل هیدرولوژی- دیفرانسیلی گری (*DHGM*) واسنجی و پارامترهای گری($\hat{\otimes}a_1$ و $\hat{\otimes}b_0$ و $\hat{\otimes}b_1$) به روش کمترین مجموع مربعات محاسبه گردید. متوسط مقادیر پارامترها ۰/۱۰۱۲۳۶۵ = $\hat{\otimes}a_1$ و ۰/۰۷۸۳۶- = $\hat{\otimes}b_0$ و ۰/۲۰۰۲۵۱ = $\hat{\otimes}b_1$ بدست آمد. برای رویدادهای مورخه ۸۲/۲/۲۵ و ۸۲/۳/۲۱ نتایج شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفت که R^2، *RMSE* و $\%VE$ رویدادها به ترتیب (۰/۸۹ ، ۰/۲۲ و ۴۲٪) و (۰/۷۵ ،۰/۱۲ و ۳۸٪) بدست آمد. با استفاده از پارامترهای حاصله، مدل برای دو رویداد دیگر مورد ارزیابی قرار گرفت. مقایسه نتایج حاصل با استفاده از شاخص ضریب همبستگی و کمترین خطای مربعات حاکی از کارایی خوب مدل گری در شبیه‌سازی فرایند بارش – رواناب بود.

واژه‌های کلیدی : بارش- رواناب، تئوری سیستم گری، حوضه آبریز لیقوان، مدل‌های ریاضی

Rainfall-Runoff Simulation Using Grey System Theory (Case Study: Lighvan Watershed)

R Mokarian [1*], A Fakheri Fard [2] and MA Ghorbani [3]

Received: 21 February 2012 Accepted: 25 August 2013
[1-]Former M.Sc. student, Water Engr. Dept. University of Tabriz, Iran
[2-]Prof., Water Engr. Dept. Univ. of Tabriz, Iran
[3-]Assist. Prof., Water Engr. Dept. University of Tabriz, Iran
[*]Corresponding Author E-mail: mokarian4561@ yahoo.com & mokarian1719@ gmail.com

Abstract

Grey system theory plays a role in prediction of events which have less observational statistics noting its mathematical basis, and in hydrology it might remove the problem of data insufficiency. In this study, the simulation of rainfall-runoff process was done by Grey system theory with the Mathematica software using the data of six corresponding events of rainfall-runoff hyetographs and also hydrometric data of Tabriz station in Lighvan zone. We used the least sum of squares method to calculate the differential and hydrological Grey Model equation (DHGM) and Grey parameters ($\otimes a_1$ and $\otimes b_0$ and $\otimes b_1$). We found the mean values of those parameters as 0.1012365, -0.07836 and 0.200251 respectively. Simulated results were evaluated for the events that had happened in the dates of 25 May 2003 and 21 June 2003 and we obtained (R^2, RMSE, VE %) parameters as (0.89, 0.22, 42%) and (0.75, 0.12, 38%) respectively. Using the obtained parameters, the model was tested for two additional events. The comparison between the obtained results by the correlation coefficient index and the least-squares error indicated good efficiency of the Grey model in simulation of rainfall-runoff process.

Keywords: Grey system theory, Lighvan River in Tabriz, Mathematical models**,** Rainfall–runoff process

مقدمه

تعیین رابطه بین بارش- رواناب برای یک منطقه از مهمترین مسایل مربوط به متخصصان آب است و برای اهداف طراحی و مدیریتی ضروری می‌باشد. در هر منطقه با توجه به شرایط منطقه و نیز آمار و اطلاعات موجود باید مدل مناسب انتخاب شود، تحقیقات مختلف در ارتباط با فرایند بارش – رواناب حاکی از آن است که هنوز روش واحدی به منظور شبیه سازی این پدیده به دست نیامده است.

مدل‌های بارش- رواناب به عنوان جزئی از سیستم‌های پیش‌بینی سیلاب می‌باشند. در یک چنین سیستم‌هایی، یک مدل بارش- رواناب ممکن است بر اساس دقت، آشنایی کاربر با آن، سادگی استفاده از آن، نوع حوضه و یا اطلاعات در دسترس انتخاب شود. تا به امروز مدل‌های بارش- رواناب فراوانی با قابلیت‌ها و پیچیدگی‌های متفاوتی ساخته و به کار برده شده‌اند. اما با وجود مدل‌های متعدد، هنوز یک مدل جامع و یکپارچه ساخته نشده است. بدین منظور از روش‌های مختلفی نظیر*HEC-HMS*، شبکه عصبی مصنوعی، منطق فازی، برنامه ریزی ژنتیک و سری‌های زمانی استفاده می‌شود. مدل گری یکی از مدل‌های برآورد رابطه بین بارش - رواناب است، که اخیراً استفاده زیادی از آن شده است. برای اولین بار تئوری گری توسط دنگ (۱۹۸۲) پیشنهاد گردید، این تئوری در مطالعه وقایعی که آمار و اطلاعات ما از آنها کم است و برای حل مسایل امروز نیاز به پیش بینی آن وقایع داریم، بکار می‌رود.

ایا (۱۹۸۹) رابطه‌ای از مرتبه n، بین بارش و رواناب در حوضه آبریز با معادله دیفرانسیلی گری استخراج نمود. لی و وانگ (۱۹۹۸) نحوه استفاده از داده‌های گسسته را در تئوری سیستم گری برای داده‌های بارش و رواناب تعیین کرد.

یو و همکاران (۲۰۰۱) بیان کردند که، حوضه آبریز واکنش سریعی نسبت به بارش در خروجی حوضه دارد، بنابراین اولین مرتبه از معادله دیفرانسیلی برای شرح رابطه بین بارش و رواناب در یک حوضه آبخیز ممکن است کافی باشد. آنها همچنین پیشنهاد کردند، که برای حل اولین مرتبه معادله دیفرانسیلی اجتناب از پیچیدگی ریاضی الزامی است. لذا اولین مدل دیفرانسیلی گری را به شکلی ساده‌ای ارایه دادند. تری‌ویدی (۲۰۰۴) معادله دیفرانسیلی بارش و رواناب را به صورت ماتریس برای سادگی محاسبات تغییر داد. ون (۲۰۰۴) با توجه به قوانین ریاضی نشان داد، که مدل دیفرانسیلی گری برای بالاتر از درجه اول نمی‌تواند وجود داشته باشد. تری‌ویدی و سینگ (۲۰۰۵) در منطقه‌ای بنام جارخند[1]واقع در شمال هندوستان مدل سیستم تئوری گری را به‌کار بست. او ضمن محاسبه پارامترهای گری به روش کمترین مجموع مربعات و سنجش بارش و رواناب مدل گری را واسنجی و مقدار سیلاب را با مقادیر پایینی از شاخص‌های خطا و مقادیر بالایی از شاخص‌های همبستگی پیش‌بینی نمود. چین مینگ چو (۲۰۰۶) در حوضه ای واقع در شمال تایوان با بررسی رابطه بارش– رواناب بوسیله موجک نشان داد، که در مسائل پیش‌بینی، سیستم گری نسبت به روش سری‌های زمانی نتایج بهتری را ارایه می‌دهد. لی و همکاران (۲۰۰۷) از کشور ژاپن در مسایل تصمیم‌گیری چندگانه از تئوری گری استفاده کرده و به نتایج مطلوبی رسیدند. چن و همکاران (۲۰۰۹) ازکشور چین در حوضه ای به نام تان زی[2] به وسعت ۲۶۷۰ کیلومتر مربع با بکارگیری تابع حالت[3] و استفاده از رابطه دیفرانسیلی گری(*DHGM*[4]) با دقت بالایی سیلاب را پیش‌بینی کردند. کینگ های و همکاران (۲۰۱۱) در کشور چین و شهر شوزهو[5] واقع در شمال این کشور با استفاده از تئوری گری روند تغییرات آبدهی چشمه کارستی شنتا[6] را شبیه سازی کرده و به نتایج مطلوبی از پیش‌بینی دست یافتند. وی شن و سیا مالا (۲۰۱۲) با استفاده از تئوری گری به منظور طراحی عملیات برداشت آب از رودخانه کرالا[7] به طول ۲۵۲ کیلومتر واقع در جنوب غربی هندوستان جریان ماهانه را شبیه سازی کرده و با توجه به شاخص‌های آماری به نتایج معقولی دست یافتند. در این تحقیق با استفاده از تئوری گری و داده‌های حوضه آبریز لیقوان پیش‌بینی سیل از طریق داده‌های بارش صورت خواهد گرفت.

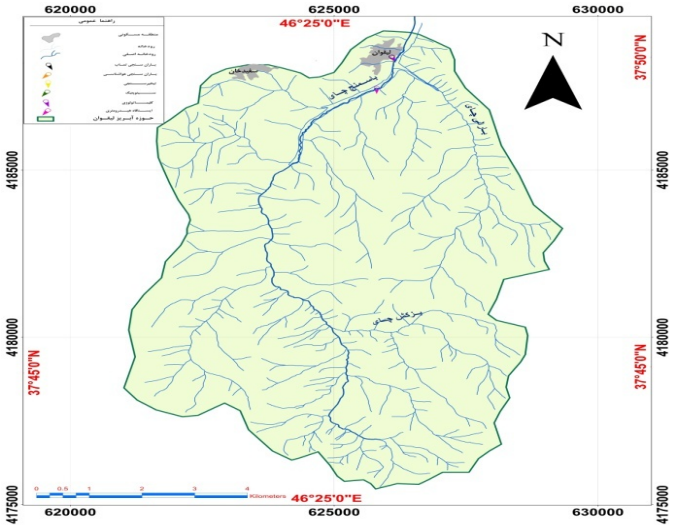
[1] Jharkhand
[2] Tunxi basin
[3] Self-Memory Function
[4] Differential Hydrological Grey Model
[5] Shuozhou
[6] Shentou
[7] Kerala

مواد و روش‌ها

منطقه مورد مطالعه

حوضه آبریز لیقوان به مساحت ۷۶/۱۹ کیلومتر مربع از ارتفاعات دامنه شمالی کوهستان سهند سر چشمه می‌گیرد و پس از تلاقی با شاخه‌های فرعی به سمت شمال ادامه مسیر داده و بعنوان زهکش اصلی حوضه مذکور در نهایت به رودخانه آجی چای تخلیه می‌شود. این رودخانه از زیر حوضه‌های اصلی دریاچه ارومیه در شمال غربی ایران و جنوب شرقی استان آذربایجان شرقی واقع است. این حوضه از سال ۱۳۵۰ به عنوان حوضه معرف انتخاب گردیده است و تجهیزات هیدروکلیماتولوژی در آن نصب شده است. حوضه آبریز لیقوان در قسمت جنوبی شهرستان تبریز واقع شده است. این حوضه با مختصات طول وعرض جغرافیایی " ۳۰،` ۱ ، $^{o}$۳۸ تا "۳۰ ، `۴۳ ، ^{o}۳۷ عرض شمالی و " ۳۵ ،` ۳۱ ، $^{o}$۴۶ تا ` ۲۲ ، ^{o}۴۶ طول شرقی قرار دارد (خورشید دوست وقویدل ۱۳۸۵).

موقعیت این حوضه در شکل ۱ نشان داده شده است. این حوضه از حوضه‌های واگرای دامنه شمالی توده کوهستانی سهند و زیر حوضه‌های مهم آجی چای می‌باشد. این حوضه دارای اقلیم نیمه خشک سرد می‌باشد، که به سمت ارتفاعات به اقلیم نیمه مرطوب سرد تغییر پیدا می کند. شریفی و همکاران (۱۳۸۳) رژیم رودخانه برفی بوده و به همین جهت این حوضه آبریز دارای شاخه‌بندی مشخص و کم تراکمی می‌باشد. ارتفاع متوسط حوضه ۲۶۷۵ متر و بارش متوسط سالانه آن ۳۱۸ میلی‌متر است. همچنین شیب متوسط حوضه ۲۵٪ و شیب متوسط آبراهه اصلی آن ۱۱ درصد است. داده‌های تحقیق با استفاده از آمار بارندگی و هیدرومتری ایستگاه لیقوان، تعداد ۶ رویداد مزدوج بارش– رواناب به تاریخ های ۸۲/۲/۲۵ و ۸۲/۳/۶ و ۸۲/۳/۲۱ و ۸۲/۵/۵ و۸۳/۲/۴ و۸۳/۲/۱۲ انتخاب گردید.



شکل ۱- موقعیت جغرافیایی حوضه آبریز لیقوان وایستگاه بارانسجی و هیدرومتری.

مدل گری

تئوری گری یکی از روش‌های مورد استفاده در مطالعه وقایعی است که دارای ابهام است، و بر اساس معادلات ریاضی پایه ریزی و برای زمینه های اطلاعات و آماری کم کاربرد دارد. در مواقعی که اطلاعات کاملی در دسترس نیست، تئوری سیستم گری می‌تواند با اطلاعات اندک به رفع مشکل داده کم کمک کند. از جمله کاربردهای تئوری گری در مسایل پیش‌بینی است. در تئوری سیستم گری سری داده‌های خام می‌تواند با روش مشخصی به سری‌های تجمعی(AGO^{1}) تبدیل شوند (جدول ۱). همان طور که از جدول مشاهده می‌گردد، داده‌ها در یک دسته ویژه به دسته سری‌های

AGO براحتی قابل بیان است. هر سری از داده AGO با توجه به سری پیشین خود بدست می‌آید. در خصوص بارش- رواناب ایا (۱۹۸۹) بیان نمود که رابطه بین بارش و رواناب در یک حوضه آبریز توسط معادله دیفرانسیلی گری از مرتبه n به شکل زیر قابل بیان است:

$$\frac{d^n}{dt^n}Q^p(t)+\otimes a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}Q^p(t)+...+\otimes a_nQ^p(t)= \quad [۱]$$
$$\otimes b_0\frac{d^m}{dt^m}R^p(t)+\otimes b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}R^p(t)+...+\otimes b_mR^p(t)$$

جدول۱- تبدیل سری داده‌های خام به سری‌های تجمعی در دوره‌های مختلف.

سری داده خام	اولین دوره سری AGO	دومین دوره سری AGO	p امین دوره سری AGO
r_1^0 r_2^0 r_3^0	$r_1^1 = r_1^0$ $r_2^1 = r_1^0+r_2^0$ $r_3^1 = r_1^0+r_2^0+r_3^0$	$r_1^2 = r_1^1$ $r_2^2 = r_1^1+r_2^1$ $r_3^2 = r_1^1+r_2^1+r_3^1$	$r_1^p = r_1^{p-1}$ $r_2^p = r_1^{p-1}+r_2^{p-1}$ $r_3^p = r_1^{p-1}+r_2^{p-1}+r_3^{p-1}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
r_N^0	$r_N^1 = r_1^0+r_2^0+...+r_N^0$	$r_N^2 = r_1^1+r_2^1+...+r_N^1$	$r_N^p = r_1^{p-1}+r_2^{p-1}+...+r_N^{p-1}$

سری‌های زمانی بارش و رواناب از مرتبه P در رابطه ۱ به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شود:

$$Q^p(t)=[q^p(1),q^p(2),q^p(3),...,q^p(k)..q^p \quad [۲]$$
$$R^p(t)=[r^p(1),r^p(2),r^p(3),...,r^p(k)..r^p \quad [۳]$$

که در q^p، r^p پارامتر P، Pامین متبه از سری های مربوط به بارش رواناب است و به ترتیب AGO زیر تعریف می شود :

$$q^p(t)=\sum_{i=1}^{t}q^{p-1}(i) \quad [۴]$$

$$r^p(t)=\sum_{i=1}^{t}r^{p-1}(i) \quad [۵]$$

که در آن $(n\geq m)$ n ، m مرتبه مشتقات معادله دیفرانسیل بوده و $\otimes a_1,\otimes a_2,\otimes a_3,...,\otimes a_m$ و $\otimes b_0,\otimes b_1,\otimes b_2,...,\otimes b_m$ پارامترهای مدل گری هستند. اولین مرتبه معادله دیفرانسیل در مطالعه حاضر به دو دلیل زیر مورد قبول قرار گرفته است : ۱- ون (۲۰۰۴) نشان داد، که مدل گری برای $(n\geq 2)$ موجود نمی‌باشد. چرا که بر اساس سیستم گری انتگرال عبارت $(d^2/dt^2)x^1(k+1)$ برابر با $x^1(k+1)$ است اما، مقدار $x^1(k+1)$ قابل دسترسی نیست. صرف نظر از اینکه مقادیر پارامترهای گری $(\otimes a_1,\otimes a_2)$ قابل تغییر هستند یا نه، این جمله $x^1(k+1)$ نمایش (۱-) امین مرتبه از سری داده های تجمعی از x به بالا تا $(k+1)$ امین داده است.۲- یو و همکاران (۲۰۰۱) بیان نمود که حوضه آبریز واکنش

[1] Accumulated Generation Operation

سریعی نسبت به بارش در خروجی حوضه دارد، بنابراین، اولین مرتبه از معادله دیفرانسیلی برای شرح رابطه بین بارش و رواناب در یک حوضه آبریز می‌تواند کافی باشد. لذا در تبعیت از معادله ۱ ، اولین مدل دیفرانسیلی گری به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dt}Q^1(t)+\otimes a_1 Q^1(t)=\otimes b_0\frac{d}{dt}R^1(t)+\otimes b_1 R^1(t) \quad [۶]$$

با به کارگیری تبدیلات لاپلاس و انتگرال گیری رابطه ۶ به صورت زیر در می‌آید:

$$Q^1(t)=[Q^1(0)-\otimes b_0 R^1(0)]e^{-\otimes a_1 t}+\otimes b_0 R^1(t)+[\otimes b_1-\otimes b_0\otimes a_1]\int_0^t e^{-\otimes a_1\tau}R^1(t-\tau)d\tau \quad [۷]$$

ایا (۱۹۸۹) رابطه ۷ را به شکل مدل زیر ارایه نمود:

$$q^1(t+1)=[q^1(0)-\otimes b_0 r^1(0)]e^{-\otimes a_1 t}+\otimes b_0 r^1(t)+[\otimes b_1-\otimes b_0\otimes a_1]\sum_{i=1}^{t}e^{-\otimes a_1 i}r^1(t-i+1) \quad [۸]$$

در تحقیق حاضر و در تئوری سیستم گری داده ها از زمان $t=1$ شروع می‌شوند، اگر به جای صفر عدد ۱ را در معادله ۸ قرار دهیم رابطه به شکل زیر در می‌آید:

$$q^1(t+1)=[q^1(1)-\otimes b_0 r^1(1)]e^{-\otimes a_1 t}+\otimes b_0 r^1(t)+[\otimes b_1-\otimes b_0\otimes a_1]\sum_{i=1}^{t}e^{-\otimes a_1 i}r^1(t-i+1) \quad [۹]$$

رابطه ۹ اولین مرتبه مدل دیفرانسیلی گری می‌باشد، که شامل پارامترهای $(\otimes b_1,\otimes b_0,\otimes a_1)$است، که به روش کمترین مربعات تخمین زده می‌شود. بر اساس تئوری گری در خصوص داده‌های گسسته با مشتق‌گیری از رابطه ۶، رابطه گری به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{d}{dt}Q^1(t)\Big|_{t=k}=\alpha^1[q^1(k)]=q^1(k)-q^1(k-1)=q^0(k) \quad [۱۰]$$

که در آن α^1 اولین مرتبه معکوسAGO یعنی ($1-AGO$) بوده و k شاخص زمان است. به طور مشابه می‌توان نوشت:

$$\frac{d}{dt}R^1(t)\Big|_{t=k}=r^0(k) \quad [۱۱]$$

لی و وانگ (۱۹۹۸) مقادیر را برای داده‌های گسسته به صورت زیر تعریف کردند:

$$Q^1(t)\Big|_{t=k}=\frac{1}{2}[q^1(k)+q^1(k-1)] \quad [۱۲]$$

$$R^1(t)\Big|_{t=k}=r^1(k) \quad [۱۳]$$

با جاگذاری روابط ۱۰ الی ۱۳ در رابطه ۶ نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$q^0(k)+\frac{\otimes a_1}{2}[q^1(k)+q^1(k-1)]=\otimes b_0 r^0(k)+\otimes b_1 r^1(k) \quad [۱۴]$$

تری ویدی (۲۰۰۴) بیان کرد، که داده‌ها از زمان $t=1$ شروع و معادله ۱۴ به صورت یک ماتریس برای $k=2,3,k,...N$ به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix}q^0(2)\\q^0(3)\\q^0(4)\\.\\.\\.\\q^0(N)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}[q^1(1)+q^1(2)] & r^0(2) & r^1(2)\\-\frac{1}{2}[q^1(2)+q^1(3)] & r^0(3) & r^1(3)\\-\frac{1}{2}[q^1(3)+q^1(4)] & r^0(4) & r^1(4)\\. & . & .\\. & . & .\\. & . & .\\-\frac{1}{2}[q^1(N-1)+q^1(N)] & r^0(N) & r^1(N)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\otimes a_1\\\otimes b_0\\\otimes b_1\end{bmatrix} \quad [۱۵]$$

ماتریس فوق به شکل ساده‌تری قابل ارائه می‌باشد:

$$Q=U\theta \quad [۱۶]$$

چون U یک ماتریس غیر مربعی است، مقدار بردار پارامتر گری (θ) به وسیله روش مجموع کمترین مربعات قابل تعیین است:

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{\otimes} a_1 \\ \hat{\otimes} b_0 \\ \hat{\otimes} b_1 \end{bmatrix} = [U^T U]^{-1} U^T Q \qquad [۱۷]$$

در رابطه فوق:

Q : ماتریس رواناب، U: ماتریس بارش – رواناب، $\hat{\otimes} a_1, \hat{\otimes} b_0, \hat{\otimes} b_1$: مقادیر برآوردی $\hat{\theta}$ ، $\otimes a_1, \otimes b_0, \otimes b_1$: مقدار برآوری پارامتر برداری گری و U^T: ترانهاده ماتریس U می باشد.

بنابراین برای هر یک از رویداد سیل و بارش پارامترهای $\hat{\otimes} a_1, \hat{\otimes} b_0, \hat{\otimes} b_1$ موجود خواهد بود. با قرار دادن مقادیر متوسط پارامترها برآوردی برای هر سیل در معادله ۹ رابطه قبلی برای داده‌های گسسته رواناب AGO به شکل زیر ارایه می گردد:

$$\hat{q}^1(k+1) = [q^1(1) - \hat{\otimes} b_0 r^1(1)] e^{-\hat{\otimes} a_1 k} + \hat{\otimes} b_0 r^1(k) \qquad [۱۸]$$
$$+ [\hat{\otimes} b_1 - \hat{\otimes} b_0 \hat{\otimes} a_1] \sum_{i=1}^{k} e^{-\hat{\otimes} a_1 i} r^1(k-i+1)$$

لذا مقادیر تجمعی رواناب $\hat{q}(t)$ برای $t = 1,2,3,...k+1$ از رابطه ۱۸ قابل دسترس است مقادیر محاسباتی تراکمی رواناب با معلومات به دست آمده در فواصل زمانی مختلف k، مقادیر برآوردی سیلاب از معادلات زیر به دست می‌دهد.

$$\hat{q}(k+1) = \hat{q}^1(k+1) - \hat{q}^1(k) \qquad [۱۹]$$

$$\hat{q}(k+1) = [q^0(1) - \hat{\otimes} b_0 \; r^0(1)] e^{-\hat{\otimes} a_1 k} [1 - e^{\hat{\otimes} a_1}] + \qquad [۲۰]$$
$$\hat{\otimes} b_0 [r^1(k) - r^1(k-1)] + [\hat{\otimes} b_1 - \hat{\otimes} b_0 \hat{\otimes} a_1] \times$$
$$[\sum_{i=1}^{k} e^{-\hat{\otimes} a_1 . i} r^1(k-i+1) - \sum_{i=1}^{k-1} e^{-\hat{\otimes} a_1 i} r^1(k-i)]$$

در رابطه ۲۰ ، $\hat{q}$ دبی برآوردی مدل گری ، $q^0(1)$ اولین مقدار دبی مشاهد شده ، $r^0(1)$ اولین مقدار بارش ساعتی، $r^1(k)$، k امین ردیف مربوط به اولین مرحله بارش تجمعی و $\hat{\otimes} a_1$ و $\hat{\otimes} b_0$ و $\hat{\otimes} b_1$ پارامترهای محاسبه شده گری، e عدد نپرین و $k = 1,2,3,...i+1$ است. کارآموز و عراقی نژاد (۱۳۸۴) جهت ارزیابی نتایج مدل، از سه شاخص کمی جذر میانگین مربعات خطا ($RMSE$) و ضریب تعیین (R^2) و درصد خطای پیش‌بینی ($\%VE$) استفاده می‌شود. در رابطه ۲۱ فرمول محاسبه ($RMSE$) ارایه شده است.

$$RMSE = \frac{\sqrt{\sum_{t}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2}}{n} \qquad [۲۱]$$

که در آن y_t مقدار واقعی متغیر وابسته و $\hat{y}_t$ مقدار پیش‌بینی شده آن واندیس t نشان دهنده بعد زمانی متغیر و n تعداد مقادیر مشاهداتی و یا برآوردی می‌باشد. هر چه این آماره کمتر باشد نشان دهنده عملکرد بهتر مدل است. درصد خطای پیش‌بینی در رابطه ۲۲ ارایه شده است، این آماره از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\%VE = \frac{\sum_{t=1}^{n} \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right|}{n} \times 100 \qquad [۲۲]$$

مقدار کمتر این آماره نیز نشان دهنده عملکرد بهتر مدل است. ضریب تعین بین مقادیر پیش‌بینی و واقعی در رابطه ۲۳ ارایه شده است، که در آن y_t مقدار واقعی متغیر وابسته و $\hat{y}_t$ مقدار پیش‌بینی شده آن واندیس t نشان دهنده بعد زمانی متغیر و n تعداد مقادیر مشاهداتی و یا برآوردی می‌باشد. .

این آماره همبستگی خطی بین مقادیر پیش‌بینی و مقادیر واقعی را بدست می‌دهد.

$$R^2 = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) \right]^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \times \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \qquad [۲۳]$$

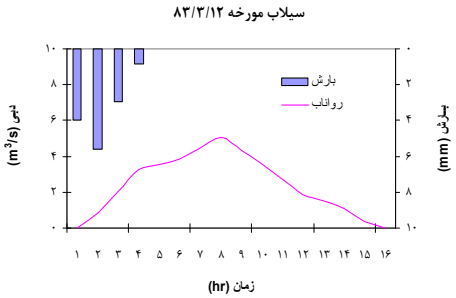
نتایج و بحث

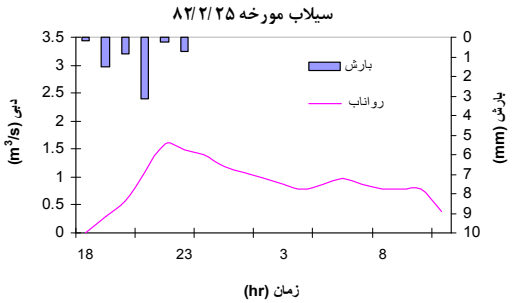
مدل دیفرانسیلی – هیدرولوژیکی گری $DHGM$، که با رابطه ۲۰ بیان گردیده است، از طریق توسعه و واسنجی کردن جهت پیش‌بینی سیلاب بکار می‌رود.

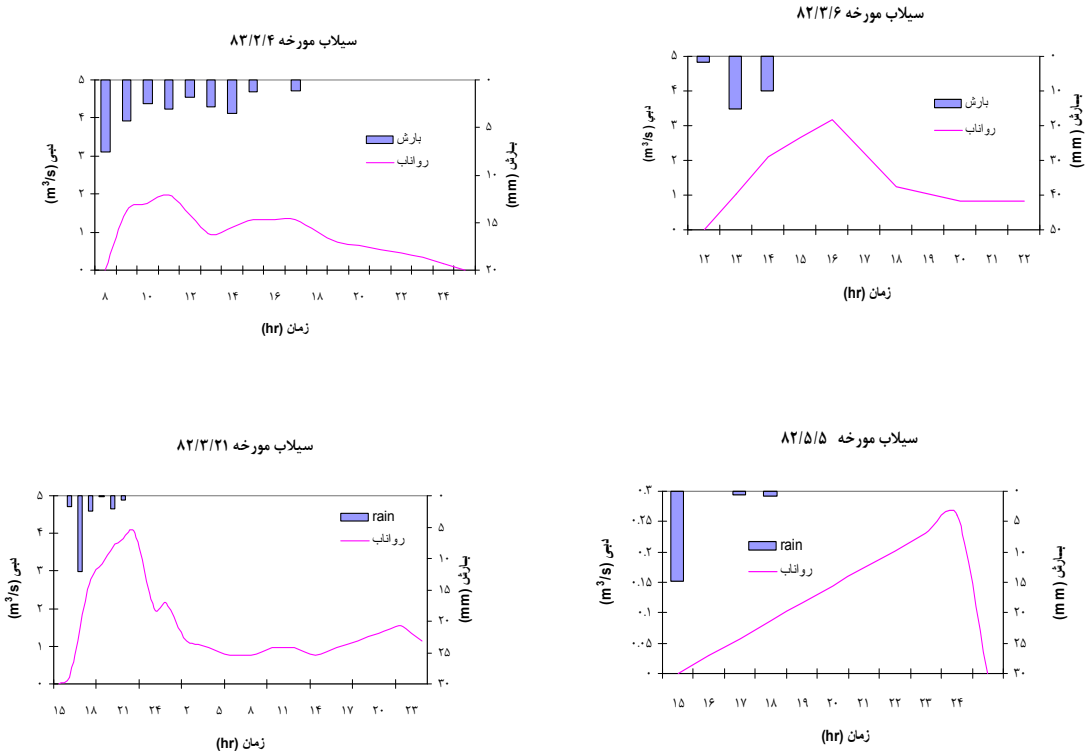
تعداد ۶ رویداد سیلابی از حوضه آبریز لیقوان برای کالیبراسیون و صحت سنجی لحاظ گردیده و در شکل ۲ نشان داده شده است، که از بین ۶ رویداد، ۴ رویداد جهت محاسبه پارامترهای گری و ۲ رویداد جهت صحت‌سنجی مورد استفاده قرار گرفته است، که نتایج آن در جدول ۲ درج گردیده است. همچنین هیدروگراف‌های مقادیر دبی مشاهداتی و مقادیر دبی برآوردی مدل گری با توجه به ضرایب هر رویداد در مرحله واسنجی برای مقایسه در شکل‌های ۳، ۴، ۵ و۶ ترسیم گردیده است.

در خصوص رویداد مورخه ۸۲/۵/۵ با توجه به زمان وقوع رگبار که در فصل تابستان است و مقدار دبی ایجاد شده که نسبتاً کم است. ابتدا بارش جهت رفع تلفات نفوذ گردیده و سپس جریان زیر قشری که مقدار آن نیز کم است پس از زمان طولانی که بعلت سرعت کم جریان به نقطه خروجی رسیده است. تاخیر زمانی ناشی از این واقعیت است. سه پارامتر $\hat{\otimes}b_1,\hat{\otimes}b_0,\hat{\otimes}a_1$ در برگیرنده تمامی فاکتورهایی همچون بارش، رواناب و ویژگی‌های حوضه برای هر یک از سیلاب‌ها است بطور خلاصه می‌توان نتیجه گرفت که پارامتر $\hat{\otimes}a_1$ بر شاخه نزولی هیدروگراف، $\hat{\otimes}b_0$ بر شاخه صعودی هیدروگراف و بالاخره پارامتر $\hat{\otimes}b_1$ بر دبی اوج هیدروگراف تأثیر می‌گذارد. پارامترهای مدل سیستم تئوری گری که شامل سه پارامتر اصلی $\hat{\otimes}a_1$ و $\hat{\otimes}b_0$ و $\hat{\otimes}b_1$ می‌باشد، بایستی پاسخگوی عوامل دخیل در ایجاد سیل در حوضه باشند. لذا با توجه به رابطه اصلی برآورد سیل در این مدل عامل بارش بطور مستقیم در رابطه DHGM وارد شده است، بنابراین پارامترهای فوق الذکر نقش ایفای بقیه عوامل در ایجاد سیل را دارد. در میزان رواناب دو دسته از عوامل فیزیوگرافی و عوامل اقلیمی تاثیر گذار هستند. از میان عوامل اقلیمی فقط بارش در فرمول قرار می‌گیرد و دخالت بقیه عوامل اقلیمی در سه پارامتر اصلی مستتر است. علاوه بر این سه پارامتر اصلی باید بیانگر نقش عوامل فیزیوگرافیک نیز در حوضه باشند با این توصیف کاملاً روشن می‌باشد که برآورد سه پارامتر باید با دقت مناسب انجام پذیرد که حساسیت آنها را بتواند بازگو کند. منفی بودن مقدار پارامتر b_o نشانگر ماهیت طبیعی هیتوگراف بارندگی که به صورت محدب می‌باشد، است.

متوسط گرفتن از پارامترها به دلیل انجام واسنجی مدل صورت پذیرفته است و همچنین هدف این بوده که شرایط حداقلی و حداکثری در محاسبات آورده شود.



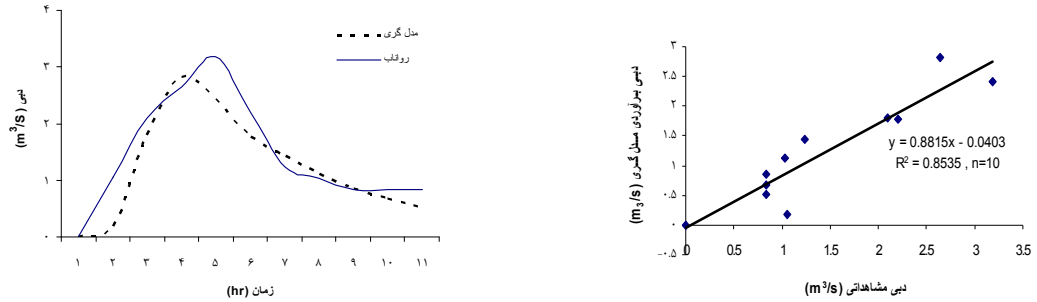




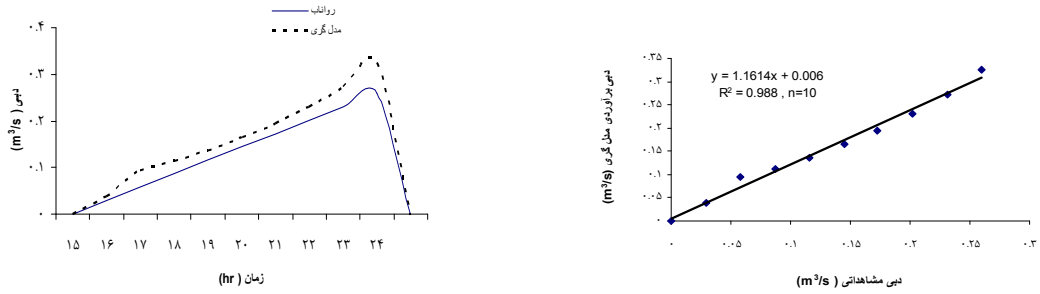
شکل ۲- هیدروگراف و هیتوگراف رویداد های بکار برده شده در تحقیق.

جدول ۲- پارامترهای حاصل از کالیبراسیون مدل گری برای سیلاب‌های مختلف.

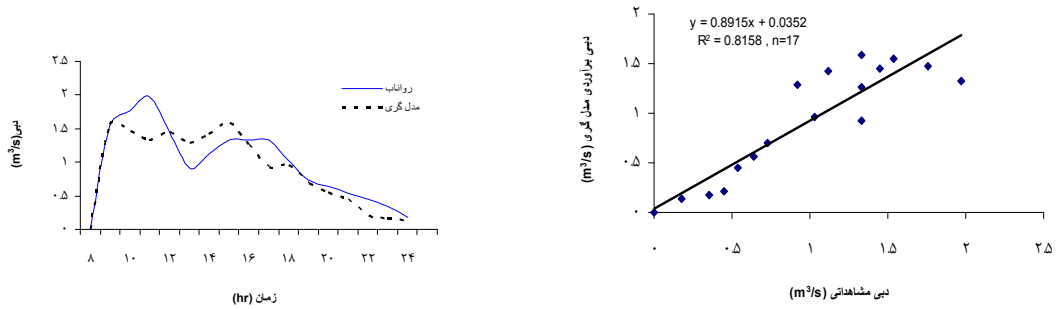
ردیف	مورخه (سیلاب)	$\hat{\otimes} a_1$	$\hat{\otimes} b_0$	$\hat{\otimes} b_1$
۱	۸۲/۳/۶	۰/۲۵۷۱۹۷	۰/۰۳۰۲۶۳۵	۰/۱۶۹۵۳۲
۲	۸۲/۵/۵	-۰/۱۶۹۹۳۱	۰/۰۰۲۷۶۸۷	۰/۰۰۴۵۷۰۳
۳	۸۳/۲/۴	۰/۲۱۳۸۳۳	۰/۰۹۴۰۲۴۴	۰/۱۳۴۴۲۸
۴	۸۳/۳/۱۲	۰/۱۰۸۱۱	-۰/۳۵۴۸۶۶	۰/۴۳۵۳۶۶
	متوسط پارامترها	۰/۱۰۱۲۶۵	-۰/۰۷۸۳۶	۰/۲۰۰۲۵۱



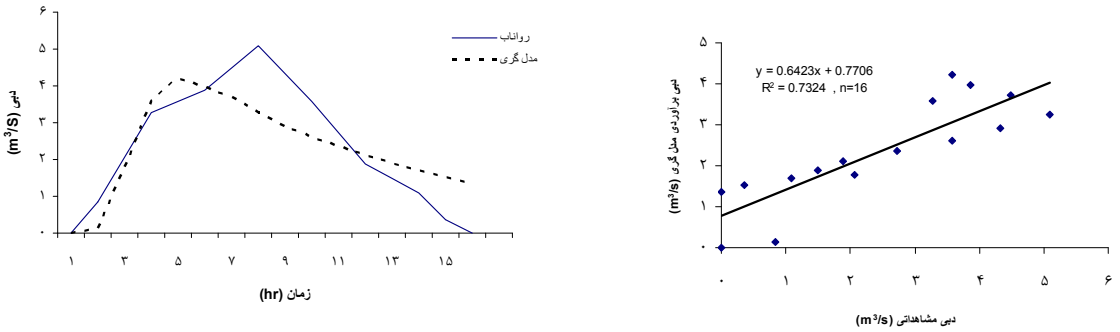
شکل ۳- نمودار مقادیر سیلاب مشاهداتی و محاسباتی حاصل از مدل گری در مرحله واسنجی رویداد مورخه ۸۲/۳/۶ ایستگاه لیقوان تبریز.



شکل ۴- نمودار مقادیر سیلاب مشاهداتی و محاسباتی حاصل از مدل گری در مرحله واسنجی رویداد مورخه ۸۲/۵/۵ ایستگاه لیقوان تبریز.

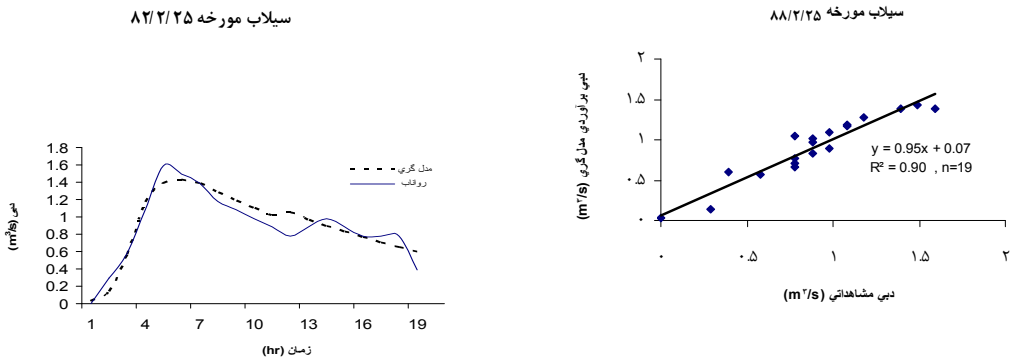


شکل ۵- نمودار مقادیر سیلاب مشاهداتی و محاسباتی حاصل از مدل گری در مرحله واسنجی رویداد مورخه ۸۳/۲/۴ ایستگاه لیقوان تبریز.

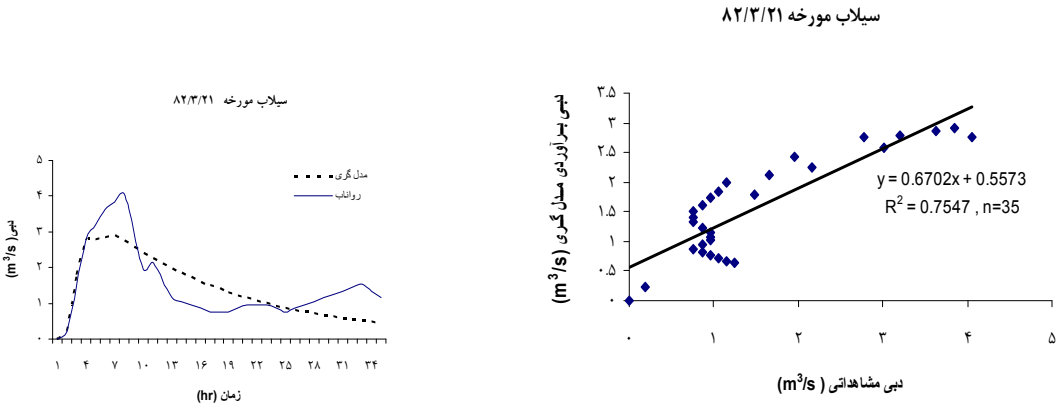


شکل ۶- – نمودار مقادیر سیلاب مشاهداتی و محاسباتی حاصل از مدل گری در مرحله واسنجی رویداد مورخه ۸۳/۳/۱۲ ایستگاه لیقوان تبریز.

با استفاده از داده‌های بارش– رواناب در حوضه آبریز لیقوان برای هر رویداد سیلابی پارامترهای مدل را برآورد کرده و ضمن واسنجی رابطه ($DHGM$) در محیط نرم افزار *Mathematica* خروجی مدل را تخمین و ضریب همبستگی آنها را محاسبه و در شکل ۳ و ۴ درج گردیده است. همان طور که در شکل نیز مشهود است R^2 بین دبی مشاهداتی و دبی برآوردی در رویدادهای مختلف از ۰/۷۳ تا ۰/۹۸ تغییر می‌کند، این موضوع دلالت بر پاسخ خوب مدل در تعیین دبی حاصل از بارش در این تئوری دارد. جهت ارزیابی نتایج مدل، از سه شاخص کمی جذر میانگین مربعات خطا ($RMSE$) و ضریب تعیین (R^2) و خطای درصد پیش بینی ($\%VE$) استفاده شده است. نتیجه ارزیابی مدل گری در خصوص دو رویداد در جدول ۳ آورده شده است، که در آن مقادیر همبستگی بالا و مقادیر خطای پایین، پیش‌بینی سیلاب با مدل گری را تأیید می‌کند.



شکل ۷ – نمودار مقادیر سیلاب مشاهداتی و محاسباتی حاصل از مدل گری در مرحله صحت سنجی رویداد مورخه ۸۲/۲/۲۵ ایستگاه لیقوان تبریز.



شکل ۸ – نمودار مقادیر سیلاب مشاهداتی و محاسباتی حاصل از مدل گری در مرحله صحت سنجی رویداد مورخه ۸۲/۳/۲۱ ایستگاه لیقوان تبریز.

جدول ۳- آماره‌های سه شاخص کمی جذر میانگین مربعات خطا ($RMSE$) و ضریب تعیین(R^2)و خطای درصد پیش بینی ($VE\%$)در مرحله صحت سنجی.

آماره	رویداد ۸۲/۲/۲۵	رویداد ۸۲/۳/۲۱
$RMSE$ (بی بعد)	۰/۲۲	۰/۱۲
R^2 (بی بعد)	۰/۸۹	۰/۷۵
VE (درصد)	۰/۴۲	۰/۳۸

نتیجه‌گیری کلی

مدل هیدرولوژی – دیفرانسیلی *Gery (DHGM)* که در رابطه ۲۰ بیان گردید، برای محاسبه سیلاب و رواناب در محدوده حوضه لیقوان به وسیله واسنجی بکار گرفته شد. از مدل چنین بر می‌آید که سه پارامتر $\hat{\otimes}a_1, \hat{\otimes}b_0, \hat{\otimes}b_1$، در برگیرنده تمامی فاکتورهایی همچون بارش، رواناب و خصوصیات حوضه برای هر یک از سیلاب ها است. پیش‌بینی هیدروگراف سیلاب با مدل گری با دقت خوب انجام و قابلیت خوب مدل به اثبات رسید. مدل پیشنهادی براساس نتایج بدست آمده بعنوان الگوئی کاربردی در دیگر حوضه‌ها می‌تواند بکار بسته شود.

ارزیابی کمی و کیفی از مدل گری یک ارتباط نزدیک بین هیدروگراف سیلاب مشاهداتی و تخمینی را مشخص می‌سازد. مقادیر پایین از شاخص‌های خطا و مقادیر بالا از شاخص‌های همبستگی توانایی مدل را در پیش‌بینی صحیح و معقول سیل در منطقه مورد مطالعه بیان می‌کند. برخی از انحراف‌های بین حالت‌های پیش‌بینی و مشاهده‌ای هیدروگراف سیلاب ناشی از فرضیات رابطه در توسعه مدل و یا مربوط به مجموع داده‌های هیدرولوژیکی، خطای برداشت، عدم یکنواختی بارش و ... می‌باشد. تری ویدی و سینگ (۲۰۰۵) در منطقه ای بنام جارخند[1] واقع در شمال هندوستان مدل سیستم تئوری گری را بکار بست. آنها برای ۶ رویداد صحت سنجی انجام دادند و مقادیر محاسباتی شاخص‌های آماری *(R^2, RMSE, VE %)* برای این ۶ رویداد به ترتیب (۲۲٪ و ۰/۶۷ و۰/۹۶۹)، (۱۴٪ و۱/۰۵ و۰/۹۸۹)، (۱۲٪ و ۰/٤٦و ۰/۹۹۰)، (۲٪ و ۰/۵۹ و ۰/۹۹۶)، (۲۸٪ و ۱/۳۹ و ۰/۹٤۷) و (۲۵٪ و ۰/۸۲ و ۰/۹٦٤) بدست آمد. وی شن و سیا مالا (۲۰۱۲) با استفاده از تئوری گری به منظور طراحی

[1] Jharkhand

عملیات برداشت آب از رودخانه کرالا [1] به طول ۲۵۲ کیلومتر واقع در جنوب غربی هندوستان جریان ماهانه را شبیه سازی کردند. آنها برای ۴ رودخانه صحت سنجی انجام دادند و مقادیر محاسباتی شاخص‌های آماری (R^2, $RMSE$) برای این ۴ رودخانه به ترتیب (۰/۶۱ و۰/۹۶۹)، (۰/۳٤ و۰/۹۸۹)، (۰/۳۲و ۰/۹۹۰) و (۰/۲۵ و ۰/۹۹۶) بدست آمد. یکی دیگر از نتایج جالب این تحقیق بازسازی مقادیر سیلاب‌ها و دبی‌های ثبت نشده است. منظور از جریان های مفقود همان دبی‌های ثبت نشده است، که در هنگام وقوع سیل‌های استثنائی به دلایل مختلف انسانی، ابزاری و حتی تخریب ایستگاه در اثر سیل قابل برداشت نبوده است. در یک حوضه، که داده‌های بارش و رواناب بصورت متناظر موجود است و در برخی لحظات داده رواناب بنا به دلیل انسانی و ابزاری ثبت نگردیده است با استفاده از مدل-سازی گری می‌توان داده‌های رواناب مربوط به لحظات ثبت نشده از روی هیدروگراف بر آوردی تعیین نمود. در مورد قابلیت اعتماد مدل بایستی افزود، که در این پژوهش واسنجی انجام شده و صحت سنجی برای کنترل ضرایب واسنجی صورت پذیرفته است.

منابع مورد استفاده

خورشید دوست ع و قویدل رحیمی ی، ۱۳۸۵. ارزیابی اثر پدیده انسو بر تغییر پذیری بارش های فصلی استان آذربایجان شرقی با استفاده از شاخص چند متغیره انسو. مجله پژوهش های جغرافیایی، شماره ۵۷، پاییز ۱۳۸۵. صفحه های ۲۶ – ۱۵.

شریفی ف، صفاپور ش و ایوب زاده ع، ۱۳۸۳ . ارزیابی مدل رایانه ای *AWBM2002* در شبیه سازی فرایندهای هیدرولوژیکی تعدادی از حوزه های آبخیز ایران. مجله پژوهش و سازندگی، شماره ۶۳، تابستان ۸۳. صفحه‌های ۴۲ -۳۵.

کارآموز م و عراقی نژاد ش، ۱۳۸۴. هیدرولوژی پیشرفته. انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر. فصل هشتم، صفحه‌های ۳۲۲ – ۳۱۹.

Chien-ming CH, 2006. Applying multi-resolution analysis to differential hydrological grey models with dual series. Journal of Hydrology 332: 174–186.

Chen XD, Xia J and Xu Q, 2009. Differential hydrological grey model (DHGM) with self-memory function and its application to flood forecasting. Science in China Press 52 (4): 1039-1049.

Deng J, 1982. Control problem of grey system. System & Control Letter 1(5): 288-294

Li GD, Yamaguchi D and Nagai M, 2007. A grey–based decision-making approach to supplier selection problem. Mathematical and Computer Modelling 46: 573-581.

Lee RH and Wang RY, 1998. Parameter estimation with colored noise effect for differential hydrological grey model. Journal of Hydrology 208: 1–15.

Qinghai G, Yanxin W and Teng M, 2011. Karst spring discharge modeling based on grey system theory. Managing Groundwater and Environment 341: 9-13.

Trivedi HV and Singh JK, 2005. Application of Grey System Theory in the development of a runoff prediction model. Biosystems Engineering 92(4): 521-526.

Trivedi HV, 2004. Grey system theory based mathematical model for runoff prediction. Department of soil and water Conservation Engineering, GB. Pant University of Agriculture and Technology, Pantnagar, India.

Vishnu B and Syamala P, 2012. Grey model for stream flow prediction. Aced International Journal of Science and Technology 1(1): 14-19.

Wen KL, 2004. The grey system analysis and its application in gas breakdown and VAR compensator finding. Journal of Computational Cognition 2(1): 21-44.

Xia J, 1989. Research and application of grey system theory to hydrology. Journal of Grey system 1(1): 43-52.

Yu PS, Chen CJ, Chen SJ and Lin SC, 2001. Application of grey model toward runoff forecasting. Journal of Hydrologic Engineering 5(4): 339-345.

[1] Kerala