

مدل‌سازی ضریب دبی سرریزهای کنگره‌ای توسط تکنیک‌های هوش مصنوعی

شهاب الدین شفیعی^۱، محسن نجارچی^{۲*}، سعید شعبانلو^۳

تاریخ دریافت: ۹۷/۱۲/۲۴ تاریخ پذیرش: ۹۹/۰۶/۰۵

۱- دانشجوی دکتری عمران، گروه مهندسی عمران، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک

۲- دانشیار گروه مهندسی عمران، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک

۳- دانشیار گروه مهندسی آب، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه

* مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: m-najarchi@iau-arak.ac.ir

چکیده

در این مطالعه، جهت تخمین ضریب دبی سرریزهای کنگره‌ای، از یک روش تکاملی بر مبنای نرو- فازی استفاده شد. به منظور بهینه‌سازی پارامترهای سیستم استنتاج عصبی- فازی سازگار (ANFIS) از الگوریتم کرم‌شبتاب (FFA) استفاده گردید. در مدل‌سازی روش‌های ANFIS و ANFIS-FFA، جهت بررسی عدم قطعیت مدل، از شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده شد. علاوه بر این، با استفاده از روش اعتبارسنجی چند لایه اقدام به ارائه مدل‌هایی شد که از انعطاف‌پذیری و تعمیم‌پذیری قابل توجهی برخوردار بود. در ابتدا، پارامترهای بی بعد ورودی شامل عدد فرود (Fr)، نسبت هد روی سرریز به ارتفاع سرریز (H_T/P)، زاویه راس (α)، نسبت طول تاج سرریز به عرض کانال (L/W)، نسبت طول راس سرریز به عرض زاویه راس (A/w) و نسبت عرض زاویه راس به ارتفاع سرریز (w/P) تعریف و برای ANFIS و ANFIS-FFA هفت مدل مختلف توسعه داده شدند. سپس با استفاده از تحلیل حساسیت، مدل‌های برتر (ANFIS 5 و ANFIS-FFA 5) و موثرترین پارامتر ورودی (عدد فرود) شناسایی گردیدند. همچنین، نتایج توزیع خطا نشان داد که تقریباً ۷۰ درصد نتایج مدل برتر (ANFIS-FFA 5) خطایی کمتر از ۵ درصد داشتند. به عبارت دیگر، دقت خوب مدل برتر به لحاظ آماری تایید گردید. در انتها تحلیل عدم قطعیت برای مدل‌های برتر اجرا گردید.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم کرم شبتاب، انفیس، بهینه‌سازی، سرریز کنگره‌ای، ضریب دبی

Modeling the Discharge Coefficient of Labyrinth Weirs Using Artificial Intelligence Techniques

S Shafiei¹, M Najarchi^{2*}, S Shabanlou³

Received: 15.03.2019

Accepted: 26.08.2020

¹ Ph.D. Student, Dept. of Civil Eng., Arak Branch, Islamic Azad Univ., Arak, Iran

² Assoc. Prof., Dept. of Civil Eng., Arak Branch, Islamic Azad Univ., Arak, Iran

³ Assoc. Prof., Dept. of Water Eng., Kermanshah Branch, Islamic Azad Univ., Kermanshah, Iran

* Corresponding Author, E-mail: m-najarchi@iau-arak.ac.ir

Abstract

In this research, an evolutionary based Neuro-fuzzy technique was utilized to estimate the discharge coefficient of labyrinth weirs. In order to optimize the parameters of the adaptive Neuro-fuzzy inference system (ANFIS), the Firefly Algorithm (FFA) was implemented. In modeling the ANFIS-FFA and ANFIS methods, the Monte Carlo simulation was used to evaluate uncertainty of the model. Furthermore, several models with significant flexibility and generalizability were provided using the k-fold cross validation method. First, the input dimensionless parameters including the Froude number (Fr), ratio of the head above the weir to the weir height (H_T/P), cycle sidewall angle (α), ratio of length of the weir crest to the channel width (L_c/W), ratio of length of the apex geometry to the width of a single cycle (A/w) and the ratio of width of a single cycle to weir height (w/P) were defined. After that, seven different models were introduced for ANFIS and ANFIS-FFA. Then, using a sensitivity analysis, the superior models (ANFIS-FFA 5 and ANFIS 5) and the most effective input parameter (Froude number) were identified. In addition, the error distribution results showed that about 70% of the superior model (ANFIS-FFA 5) results had an error less than 5%. In other words, the superior model had a high statistical significance. Ultimately, the uncertainty analysis for the superior models was carried out.

Keywords: ANFIS, Discharge coefficient, Firefly algorithm, Labyrinth weir, Optimization

مقدمه

روی سرریز (H_T)، عرض سرریز (W) و شتاب جاذبه (g) است:

$$Cd = \frac{3}{2} \frac{Q}{\sqrt{2gWH_T^{3/2}}} \quad [1]$$

کومار و همکاران (۲۰۱۱) جریان از روی سرریزهای کنگره‌ای مثلثی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها با تحلیل نتایج آزمایشگاهی، روابطی را به عنوان تابعی از هد آب روی سرریز به ارتفاع تاج سرریز جهت محاسبه ضریب دبی این نوع از سرریزهای نرمال ارائه نمودند. چانسون و وانگ (۲۰۱۳) با استفاده از تکنیک حجم غیردائمی بر زمان، دبی عبوری از روی سرریزهای مثلثی ۹۰ درجه را کالیبره نمودند. آنها همچنین با استفاده از معادله پیوستگی رابطه بین دبی و ارتفاع آب بالادست را استخراج نمودند. کارولو و همکاران (۲۰۱۷) رفتار

به طور کلی سرریزها به صورت گسترده‌ای برای تنظیم و اندازه‌گیری جریان درون کانال‌های باز مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین با توجه به کاربرد نوع سرریز، این نوع از سازه‌های هیدرولیکی در شکل‌های مختلفی از قبیل مستطیلی، مثلثی، دایروی و کنگره‌ای به کار گرفته می‌شوند. علاوه بر این ضریب دبی یک سرریز مهمترین پارامتر طراحی این نوع از سازه‌ها محسوب می‌شود. به دلیل اهمیت فراوان سرریزها، مطالعات فراوانی توسط محققین مختلفی بر روی رفتار هیدرولیکی سرریزها انجام شده است. به عنوان مثال: باقری و حیدرپور (۲۰۱۰) با استفاده از تئوری گرداب آزاد ضریب دبی سرریزهای مستطیلی لبه تیز را تخمین زدند. آنها بیان نمودند که ضریب دبی تابعی از دبی جریان (Q)، هد آب

(FFA) است که در پیش بینی ضریب دبی سرریزهای کنگره ای تا کنون مورد استفاده قرار نگرفته است. این روش یک الگوریتم بهینه‌سازی قدرتمند است که مدل‌های هوش مصنوعی توسط آن‌ها بهینه‌سازی می‌شوند. علاوه بر این، استفاده از ANFIS به عنوان یک روش قوی در پیش بینی ضریب دبی، شناخته شده است. بنابراین، یک روش ترکیبی موسوم به ANFIS-FFA جهت پیش بینی ضریب دبی سرریزهای کنگره ای، ارائه می‌شود. در این تحقیق، برای اولین بار، ضریب دبی سرریزهای کنگره‌ای توسط ANFIS-FFA شبیه‌سازی می‌شود. برای بررسی دقت مدل‌های هوش مصنوعی از شبیه‌سازی مونت کارلو و برای اعتبارسنجی نتایج مدل‌های ANFIS و ANFIS-FFA از روش اعتبارسنجی چند لایه بهره گرفته می‌شود. سپس با استفاده از تحلیل حساسیت دقیق‌ترین مدل عددی معرفی می‌شود. همچنین با تجزیه و تحلیل نتایج مدل‌سازی‌ها، موثرترین پارامتر برای تخمین ضریب دبی ارائه می‌گردد. بنابراین هدف اصلی در این تحقیق، بهینه‌سازی مدل ANFIS با استفاده از الگوریتم کرم شب‌تاب است. علاوه بر این، با انجام یک تحلیل حساسیت، مدل برتر و موثرترین پارامتر ورودی نیز شناسایی شده‌اند.

مواد و روش‌ها

شبکه انفیس

شبکه انفیس ترکیبی از سیستم فازی و شبکه عصبی مصنوعی است بطوریکه مزایای هر دو را به طور همزمان در بردارد. (بوراگوین و ماهانتا، ۲۰۰۸). ساختار مناسب ANFIS متناسب با داده‌های ورودی، درجه عضویت، قوانین و توابع درجه عضویت خروجی، انتخاب می‌شود. در لایه اول ورودی میزان تعلق هر ورودی به بازه های مختلف فازی مشخص می‌شود. با ضرب مقادیر ورودی به هر گره در یکدیگر، وزن قانون

هیدرولیکی سرریزهای کنگره‌ای مثلثی را مورد مطالعه آزمایشگاهی قرار دادند. آنها روابطی را برای محاسبه دبی عبوری از روی این شکل از سرریزها ارائه نمودند و پیشنهاد دادند که رابطه مذکور را می‌توان برای سرریزهای لبه پهن نیز مورد استفاده قرار داد.

امروزه به منظور حل مسائل غیر خطی و سیستم‌های پیچیده علوم مختلف از تکنیک‌های مختلف شبکه عصبی و الگوریتم‌های عصبی- فازی استفاده گسترده‌ای می‌شود. اخیراً محققین فراوانی پدیده‌های هیدرولیکی را با استفاده از محاسبات نرم برآورد و پیش‌بینی نموده‌اند به عنوان مثال، حقیابی و همکاران (۲۰۱۷) ضریب دبی سرریزهای کنگره‌ای شکل را به وسیله شبکه عصبی مصنوعی MPL و مدل ANFIS شبیه‌سازی کردند. آنها با تجزیه و تحلیل نتایج مطالعه خود نشان دادند که مدل ANFIS دارای دقت بیشتری است. روشنگر و همکاران (۲۰۱۷) ضریب دبی سرریزهای کنگره‌ای را توسط مدل‌های ANFIS و GEP تخمین زدند. آنها با تجزیه و تحلیل نتایج مدل‌سازی‌ها نشان دادند که مدل GEP دارای دقت بیشتری بود. علاوه بر این، روشنگر و همکاران (۲۰۱۸) با استفاده از ماشین بردار پشتیبان^۱ ضریب دبی سرریزهای کنگره‌ای و قوسی را مدل‌سازی نمودند. آنها با تجزیه و تحلیل نتایج مدل‌سازی‌ها، مدل برتر و موثرترین پارامتر ورودی را معرفی نمودند. لازم به ذکر است که عظیمی و همکاران (۲۰۱۹) ضریب دبی سرریزهای جانبی واقع بر کانال‌های نوزنقه‌ای را توسط روش ماشین بردار پشتیبان شبیه‌سازی نمودند. آنها با تجزیه و تحلیل نتایج مطالعه خود مدل برتر و موثرترین پارامتر ورودی را شناسایی نمودند. یک ماتریس محاسباتی برای تخمین ضریب دبی این نوع از سازه‌های هیدرولیکی ارائه شد.

یکی از الگوریتم‌هایی که اخیراً کاربردهای موفقی در مهندسی هیدرولیک داشته است، الگوریتم کرم‌شب‌تاب

¹ Support Vector Machine

هستند که در این تحقیق از مجموعه فازی خطی استفاده شده است. علاوه بر این، تعداد تکرار در نظر گرفته شده جهت آموزش شبکه برابر با ۵۰۰۰ در نظر گرفته شده است. روش مورد استفاده جهت تولید سیستم استنتاج فازی (FIS) در این تحقیق، روش خوشه‌بندی C فازی (FCM) است که نسبت به روش‌های دیگر، به تعداد پارامتر کمتری نیاز دارد و عملکرد موفقی در مطالعات اخیر داشته است. در مورد نحوه بهینه سازی در شبکه ANFIS، دو روش بهینه سازی (BP) backpropagation و Hybrid که ترکیبی از BP و (LS) least square است (BP-LS) الگوریتم های کلاسیک جهت آموزش این شبکه بکار گرفته می‌شوند. در این تحقیق علاوه بر استفاده از روش ترکیبی، از الگوریتم کرم شب‌تاب که یک الگوریتم فرا ابتکاری جدید و قدرتمند در حل مسائل غیرخطی است، نیز استفاده می‌شود. این الگوریتم جهت بهینه سازی ضرایب تابع عضویت شامل (c و σ) برای ورودی‌های مختلف، مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ادامه، چگونگی عملکرد این الگوریتم بیان می‌شود.

الگوریتم کرم شب‌تاب

الگوریتم کرم شب‌تاب (FA) برای اولین بار توسط (یانگ، ۲۰۱۰) ارائه شد. ایده اصلی این الگوریتم از ارتباط نوری میان کرم های شب تاب الهام گرفته شده است. این الگوریتم را می‌توان از مظاهر هوش ازدحامی دانست که در آن همکاری و احتمالاً رقابت اعضای ساده و کم هوش، مرتبه بالاتری از هوشمندی را ایجاد می‌کنند که قطعاً توسط هیچ یک از اجزا، قابل حصول نیست. الگوریتم کرم شب‌تاب بر پایه قوانین زیر، ارائه شده است (یانگ، ۲۰۱۰):

۱) همه کرم شب‌تاب‌ها دو جنسیتی هستند، یعنی صرف نظر از جنسیت خود به‌صورت جذاب تر و شفاف تری حرکت خواهند کرد بطوری‌که یک کرم شب‌تاب، تمام کرم شب‌تاب‌های دیگر را جذب می‌کند.

ها (Wi) در لایه دوم بدست می‌آید. در لایه سوم، عمل محاسبه وزن نسبی قوانین انجام می‌گیرد. لایه چهارم، لایه قوانین است که از انجام عملیات بر روی سیگنال های ورودی به این لایه، حاصل می‌شود. لایه آخر، خروجی شبکه (f) است که هدف آن حداقل نمودن اختلاف خروجی بدست آمده از شبکه و خروجی واقعی است.

شبکه ANFIS دارای m ویژگی ورودی و n قانون است که هر قانون به صورت زیر بیان می‌شود:

$$R_i : \text{if } (x_1 \text{ is } f_{i1}) \text{ and } (x_j \text{ is } f_{ij}) \text{ and } \dots \quad [2]$$

$$(x_m \text{ is } f_{im}) \text{ then output} = f_i$$

که در آن x_j ، j^{th} ورودی و f_{ij} تابع عضویت قانون روی x_j و f_i خروجی قانون است. توابع عضویت g_{ij} که دارای شکل گاوسی است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_{ij}(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - c_{ij}}{\sigma_{ij}}\right)^2\right) \quad [3]$$

از ضرب به عنوان عملگر "AND" استفاده شد، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mu_i = \prod_{j=1}^m g(ij)(x_j) \quad [4]$$

که در آن μ_i درجه فعال شده قانون را نشان می‌دهد. خروجی سیستم نیز با رابطه مرکز ثقل به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i f_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i} \quad [5]$$

پنج عامل مهم و موثر در مدلسازی ANFIS، عبارتند از نوع مجموعه‌های فازی ورودی، تعداد مجموعه‌های فازی ورودی، نوع مجموعه فازی خروجی، شیوه بهینه سازی و تعداد تکرارهاست. مجموعه های فازی ورودی در انواع مختلفی مانند توابع مثلثی، نوزنقه‌ای، گوسی و غیره هستند. در این تحقیق، با توجه به عملکرد خوب تابع گوسی در مطالعات اخیر، از این نوع استفاده می‌شود. مجموعه های فازی خروجی نیز در دو نوع ثابت و خطی

- ۵- حرکت دیگر افراد جمعیت به سمت بهترین فرد و به روزرسانی شدت نور با توجه به آن
- ۶- بررسی شرایط توقف؛ اگر شرایط توقف مهیا بود، حرکت به سمت مرحله بعد، در غیر این صورت، حرکت به سمت گام ۴
- ۷- پایان الگوریتم.
- عملکرد الگوریتم کرم شب تاب به طور کامل به تعداد جمعیت اولیه، تابع جذب و ضریب جذب وابسته است. هر چه ضریب جذب نور بیشتر باشد، سرعت جذب اعضا جمعیت به سمت پرنورترین عضو، بیشتر می شود.

مدل آزمایشگاهی

در این مطالعه، برای صحت سنجی نتایج مدل‌های عددی از مقادیر آزمایشگاهی اندازه‌گیری شده توسط کومار و همکاران (۲۰۱۱) و سیمونز (۲۰۱۴) استفاده می‌شود. مدل آزمایشگاهی کومار و همکاران (۲۰۱۱) شامل یک کانال مستطیلی به طول ۱۲ متر، عرض ۰/۲۸ متر و عمق ۰/۴۱ متر می‌باشد. سرریز از صفحات فولادی ساخته شده که در فاصله ۱۱ متری از ورودی کانال مستطیلی نصب گردیده است. همچنین مدل آزمایشگاهی سیمونز (۲۰۱۴) در یک کانال مستطیلی به طول ۱۴/۶ متر، عرض ۱/۲ متر و ارتفاع ۰/۹ متر انجام شده است. شیب کانال در کلیه اندازه‌گیری‌ها برابر صفر و کانال افقی بود. او مقادیر آزمایشگاهی را در دو حالت سرریزهای کنگره‌ای با وضعیت قرارگیری معمولی (NLWs) و سرریز کنگره‌ای با وضعیت قرارگیری بر عکس (ILWs) اندازه‌گیری کرد. در این مطالعات دبی جریان (Q)، هد کل روی تاج سرریز (H_T)، ارتفاع تاج سرریز (P)، زاویه راس (α)، طول تاج سرریز (L_c)، کل عرض سرریز کنگره‌ای (W)، طول هندسی راس (A) و عرض زاویه راس (w) هستند. در شکل ۱ طرح کلی مدل آزمایشگاهی کومار و همکاران (۲۰۱۱) و سیمونز (۲۰۱۴) به تصویر کشیده شده است. علاوه بر این دامنه مقادیر آزمایشگاهی مورد استفاده برای شبیه‌سازی ضریب دبی توسط مدل‌های

- (۲) درجه جذابیت یک کرم شب‌تاب با درخشش آن متناسب است. همچنین ممکن است درخشندگی با افزایش فاصله از کرم شب‌تاب‌های دیگر، کاهش یابد. حال اگر یک کرم شب‌تاب جذاب‌تری وجود نداشته باشد، آنگاه به صورت تصادفی حرکت خواهد کرد.
- (۳) درخشندگی یا شدت نور یک کرم شب‌تاب، توسط مقدار تابع هدف تعیین می‌شود. در مسائل کمینه‌سازی، کرم شب تاب با نور زیادتر، کرم‌های شب تاب با نور کمتر را به خود جذب می‌کند و فرض کنید n تعداد کرم شب تاب، x_i موقعیت ذره i^{th} و $f(x_i)$ تابع هزینه باشد. لذا میزان درخشندگی هر کرم، برابر با مقدار تابع هزینه آن خواهد بود:

$$I_i = f(x_i), \quad 1 \leq i \leq n \quad [6]$$

هر کرم شب‌تاب دارای یک مشخصه نور می‌باشد که نشان می‌دهد تا چه اندازه ای قوی است. این مشخصه مقداری نسبی بوده و با تغییر فاصله بین دو کرم i و j تغییر می‌کند. تابع جذب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta(r) = \beta_0 e^{-\gamma r^2} \quad [7]$$

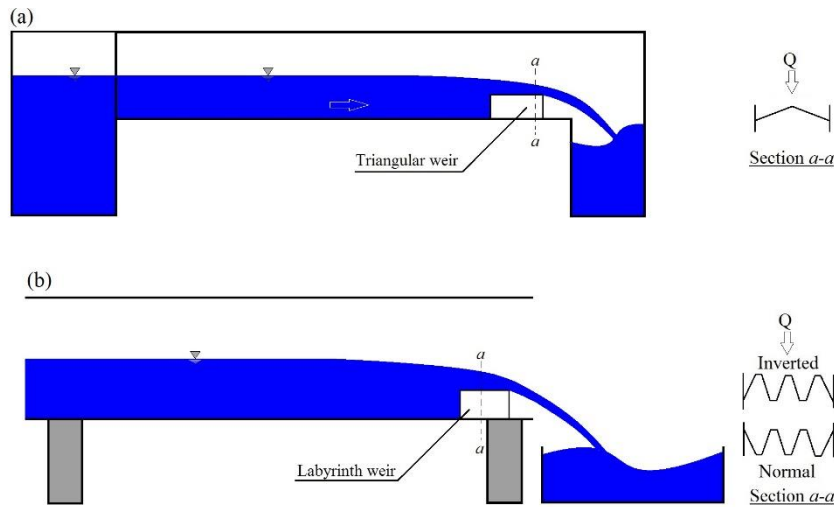
که در آن β_0 میزان جذب به از $r=0$ و γ ضریب جذب نور می‌باشد. حرکت کرم i با موقعیت x_i به سمت کرم j با موقعیت x_j (با نور بیشتر) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \beta_r(x_j - x_i) \quad [8]$$

به طور کلی، فلوچارت مربوط به الگوریتم کرم شب‌تاب به صورت زیر می‌باشد:

- ۱- تعیین و مقداردهی اولیه کرم‌های شب تاب (جمعیت اولیه)
- ۲- به دست آوردن تابع هزینه برای هر فرد از جمعیت در موقعیت خود
- ۳- تخصیص تصادفی شدت نور به هر فرد از جمعیت
- ۴- تعیین بهترین (پرنورترین) فرد در جمعیت به واسطه محاسبه توابع هزینه کل افراد جمعیت

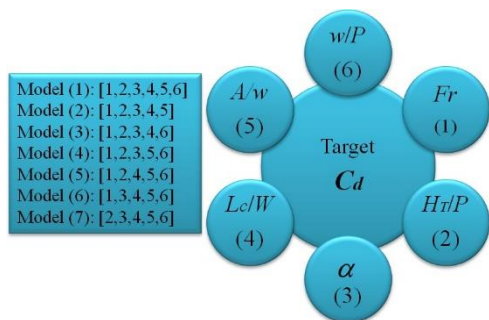
عددی برای کومار و همکاران (۲۰۱۱) و سیمونز (۲۰۱۴) در جدول ۱ مرتب شده است.



شکل ۱- طرح کلی مدل آزمایشگاهی (a) کومار و همکاران (۲۰۱۱) (b) سیمونز (۲۰۱۴).

جدول ۱- محدوده مقادیر آزمایشگاهی کومار و همکاران (۲۰۱۱) و سیمونز (۲۰۱۴).

Parameter	Fr		H_T/P		α (degree)		L_c/W		A/w		w/P	
	min	max	min	max	min	max	min	max	min	max	min	max
محدوده												
کومار و همکاران (۲۰۱۱)	۰/۰۰۱	۰/۱۱۱	۰/۱۸۶	۶/۹۶۸	۱۵	۹۰	۰/۵	۱/۹۳۲	۰	۰	۲/۵۹۳	۳/۰۴۳
سیمونز (۲۰۱۴)	۰/۰۱۷	۰/۴۴۵	۰/۰۵۳	۰/۸۳۵	۱۲	۱۲	۱/۸۶۹	۱/۲۱۰	۰	۰/۱۲۰	۱/۸۹۲	۲/۰۱۷



شکل ۲- ترکیب مدل‌های ANFIS و ANFIS-FFA.

در این مطالعه، برای بررسی توانایی مدل‌های ANFIS و ANFIS-FFA از شبیه‌سازی‌های مونت کارلو استفاده می‌شود. تعداد تکرارهای در نظر گرفته شده جهت حل مساله مورد نظر، برابر با ۱۰۰۰۰ می باشد. علاوه بر این، از روش اعتبار سنجی چند لایه برای صحت سنجی مدل‌های ANFIS و ANFIS-FFA بهره گرفته می‌شود. در روش اعتبارسنجی چند لایه ای، نمونه اصلی به طور

ضریب دبی

به طور کلی ضریب دبی سرریزهای نرمال از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$C_d = \frac{3}{2} \frac{Q}{\sqrt{2g} L_c H_T^{3/2}} \quad [9]$$

همچنین ضریب دبی سرریزهای کنگره‌ای تابعی از پارامترهای زیر است:

$$C_d = f(Fr, H_T/P, \alpha, L_c/W, A/w, w/P) \quad [10]$$

بنابراین در مطالعه حاضر برای محاسبه ضریب دبی توسط مدل هوش مصنوعی از پارامترهای بدون بعد رابطه (۱۰) استفاده می‌شود. نحوه ترکیب پارامترهای ورودی برای توسعه مدل‌های هوش مصنوعی در شکل ۲ نشان داده شده است.

$$Nash = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (R_{(Observed)_i} - R_{(Predicted)_i})^2}{\sum_{i=1}^n (R_{(Observed)_i} - \bar{R}_{(Observed)_i})^2} \quad [15]$$

$$VAF = \left(1 - \frac{\text{var}(R_{(Predicted)_i} - R_{(Observed)_i})}{\text{var}(R_{(Predicted)_i})} \right) \times 100 \quad [16]$$

[۱۶]

در معادلات مذکور مقادیر $(R)_{(Predicted)_i}$ ، $(R)_{(Observed)_i}$ و $(\bar{R})_{(Observed)_i}$ به ترتیب برابر مقادیر آزمایشگاهی، نتایج پیش‌بینی شده توسط مدل‌های عددی، میانگین مقادیر آزمایشگاهی و تعداد اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی هستند. شاخص‌های آماری معرفی شده، مقایسه همزمانی از میانگین و واریانس مدل‌ها را ارائه نمی‌کنند. بنابراین شاخص اطلاعات آکیاکی (AIC) برای مقایسه ضریب دبی پیش‌بینی شده با ضریب دبی آزمایشگاهی به صورت زیر معرفی می‌شود (ابتهاج و همکاران، ۲۰۱۶):

$$AIC = n \cdot \log \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_{(Observed)_i} - R_{(Predicted)_i})^2 \right] + 2k \quad [17]$$

در اینجا k برابر تعداد پارامترهای تخمین زده شده مورد استفاده در مدل عددی است. پارامتر ACI به عنوان یک معیار برای انطباق مناسب یک مدل آماری در نظر گرفته می‌شود. همچنین این شاخص به عنوان ابزاری برای انتخاب مدل استفاده می‌گردد و به طور همزمان پیچیدگی و دقت مدل عددی را توصیف می‌کند.

نتایج و بحث

مدل‌های هوش مصنوعی

در ادامه با انجام تحلیل حساسیت نتایج مدل‌های ANFIS 1 تا 7 بررسی می‌شوند. مقایسه کلیه شاخص‌های آماری برای این مدل‌ها در شکل ۳ قابل مشاهده است. همچنین مقایسه مقادیر ضریب دبی آزمایشگاهی و شبیه‌سازی شده توسط مدل‌های هوش مصنوعی در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است. مدل ANFIS 1 مقادیر ضریب دبی سرریز کنگره‌ای را با

تصادفی به k نمونه فرعی با اندازه مساوی تقسیم می‌شود. در بین نمونه‌های فرعی k ، یک نمونه فرعی به عنوان داده‌های اعتبارسنجی و باقی‌مانده آنها به عنوان داده‌های آزمون این مدل استفاده می‌شوند. سپس روند اعتبارسنجی چند لایه k بار تکرار می‌شود (برابر تعداد لایه‌ها)، هر کدام از نمونه‌های فرعی k دقیقاً یکبار به عنوان داده‌های اعتبارسنجی مورد استفاده قرار می‌گیرند. نتایج بدست آمده از k لایه مذکور متوسط‌گیری شده و به عنوان یک تخمین ارائه می‌شود. مزیت این روش، تکرار تصادفی نمونه‌های فرعی در روند آزمون و آموزش برای کلیه مشاهدات است و هر مشاهده دقیقاً یکبار برای اعتبارسنجی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مطالعه مقدار k برابر با ۵ فرض شده است. استفاده از روش k -fold cross validation منتج به افزایش تعمیم مدل مورد نظر می‌شود (ابتهاج و همکاران، ۲۰۱۶).

دقت مدل‌های عددی

در این مطالعه برای بررسی دقت مدل‌های عددی از شاخص‌های آماری ضریب تبیین (R^2)، خطای جذر میانگین مربعات ($RMSE$)، خطای مطلق میانگین (MAE)، شاخص پراکندگی (SI)، ضریب بهره‌وری نش-ساتکلیف ($Nash$) و شاخص عملکرد (VAF) به صورت زیر استفاده می‌شود:

[۱۱]

$$R^2 = \frac{\left(n \sum_{i=1}^n R_{(Predicted)_i} R_{(Observed)_i} - \sum_{i=1}^n R_{(Predicted)_i} \sum_{i=1}^n R_{(Observed)_i} \right)^2}{\left(n \sum_{i=1}^n (R_{(Predicted)_i})^2 - \sum_{i=1}^n (R_{(Predicted)_i}) \right) \left(n \sum_{i=1}^n (R_{(Observed)_i})^2 - \sum_{i=1}^n (R_{(Observed)_i}) \right)}$$

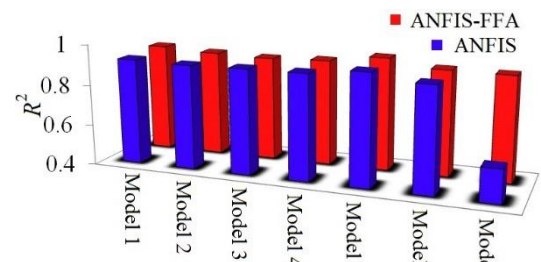
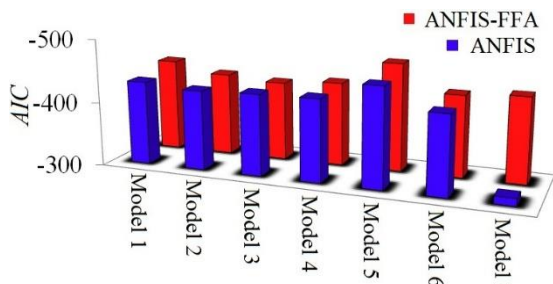
$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_{(Predicted)_i} - R_{(Observed)_i})^2} \quad [12]$$

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |(R)_{(Predicted)_i} - (R)_{(Observed)_i}| \quad [13]$$

$$SI = \frac{RMSE}{(\bar{R})_{(Observed)}} \quad [14]$$

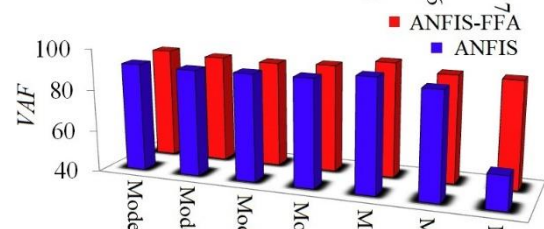
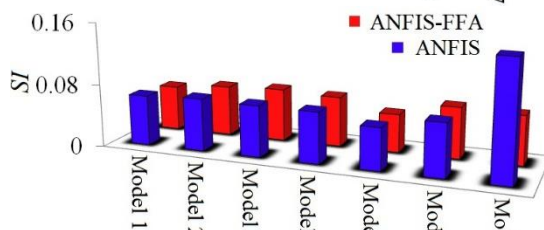
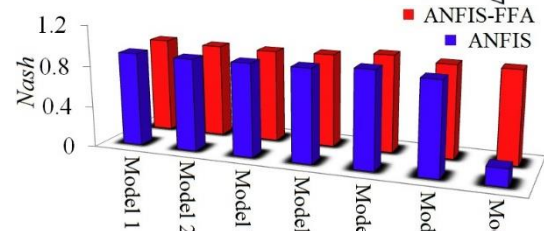
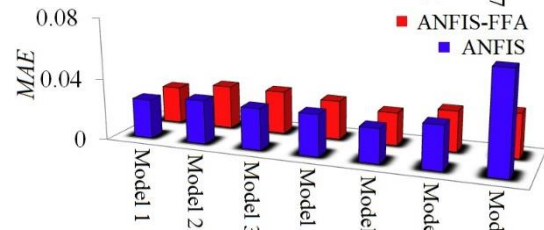
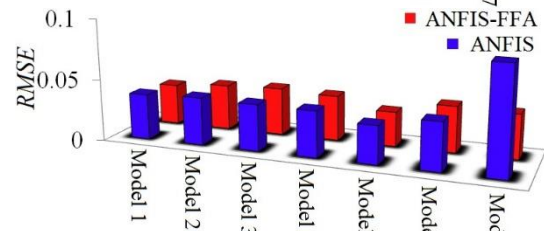
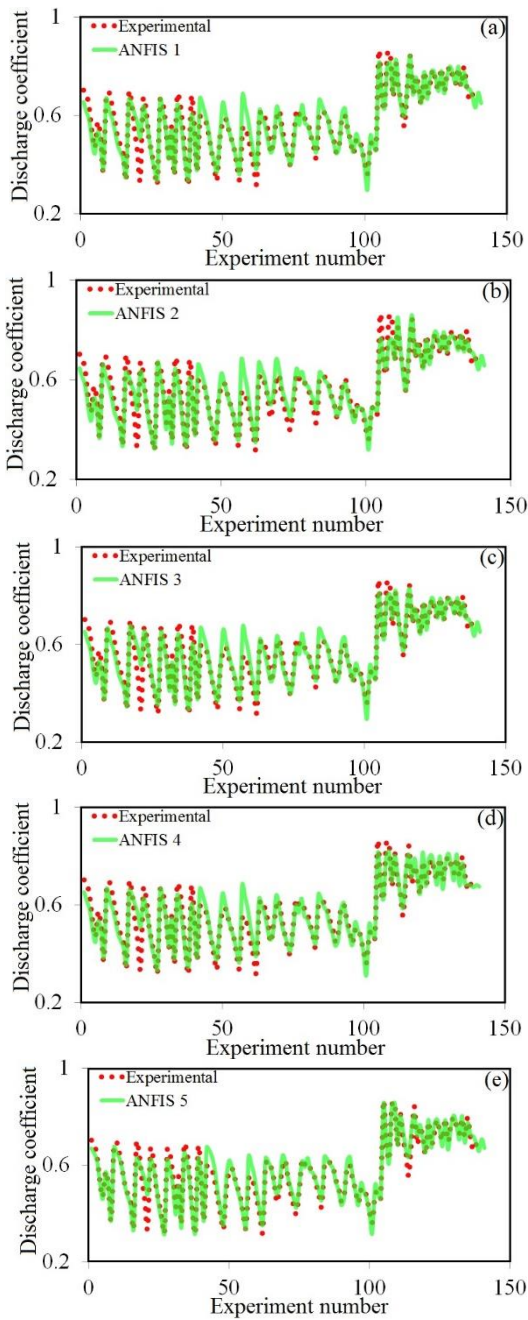
مساوی با ۰/۰۶۸ و ۰/۰۳۹ تخمین زده شده‌اند. مدل ANFIS 7 مقادیر تابع هدف را بر حسب پارامترهای بدون بعد H_T/P , α , Lc/W , A/w , w/P تخمین می‌زند. برای این مدل تاثیر پارامتر عدد فرود (F_r) حذف شده است. برای مدل مذکور مقادیر $RMSE$ و MAE به ترتیب مساوی با ۰/۰۸۶ و ۰/۱۴۲ محاسبه گردیده است. علاوه بر این، برای مدل ANFIS-FFA 1 مقادیر MAE و AIC به ترتیب مساوی با ۰/۰۲۴ و ۰/۶۲۲- محاسبه شده‌اند. همچنین برای مدل‌های ANFIS-FFA 2، ANFIS-FFA 3 و ANFIS-FFA 4 مقدار $Nash$ به ترتیب مساوی با ۰/۹۱۰، ۰/۹۰۱ و ۰/۹۱۲ بدست آمده‌اند. در مقابل در بین کلیه مدل‌های هوش مصنوعی، ANFIS-FFA 5 دارای بیشترین دقت است. به عنوان مثال، برای ANFIS-FFA 5 مقادیر SI ، MAE و AIC به ترتیب مساوی ۰/۰۴۹، ۰/۰۲۱ و ۰/۶۹۰۲۹- بدست آمدند. این در حالی است که، برای ANFIS-FFA 6 و ANFIS-FFA 7 شاخص $RMSE$ به ترتیب مساوی با ۰/۰۳۸ و ۰/۰۳۶ تخمین زده شدند. بر اساس نتایج تحلیل حساسیت، در بین مدل‌های ANFIS-FFA 5 و ANFIS 5 به عنوان مدل برتر معرفی شدند. هر دوی این مدل‌های هوش مصنوعی مقادیر ضریب دبی سرریزهای کنگره‌ای را بر حسب پارامترهای بدون بعد F_r , H_T/P , Lc/W , A/w , w/P شبیه‌سازی نمودند. لازم به ذکر است که با حذف پارامتر عدد فرود، دقت شبیه‌سازی مدل‌های هوش مصنوعی به شکل قابل ملاحظه‌ای کاهش یافت بنابراین عدد فرود (F_r) موثرترین پارامتر ورودی شناسایی شد. لازم به ذکر است که با توجه به نتایج مدل‌سازی‌ها، بعد از عدد فرود، پارامترهای بدون بعد H_T/P و A/w به ترتیب اثرگذارترین پارامترهای ورودی شناسایی گردیدند.

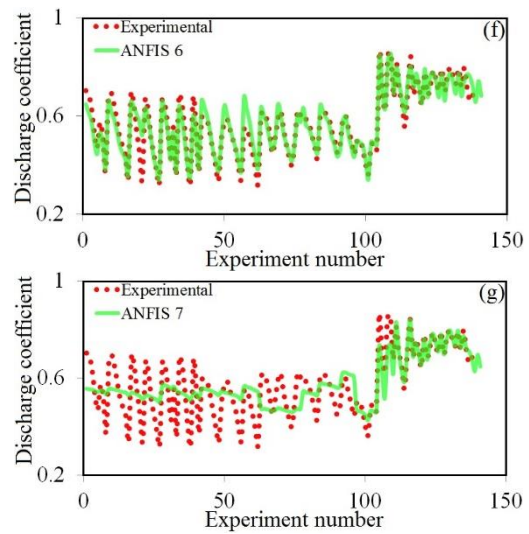
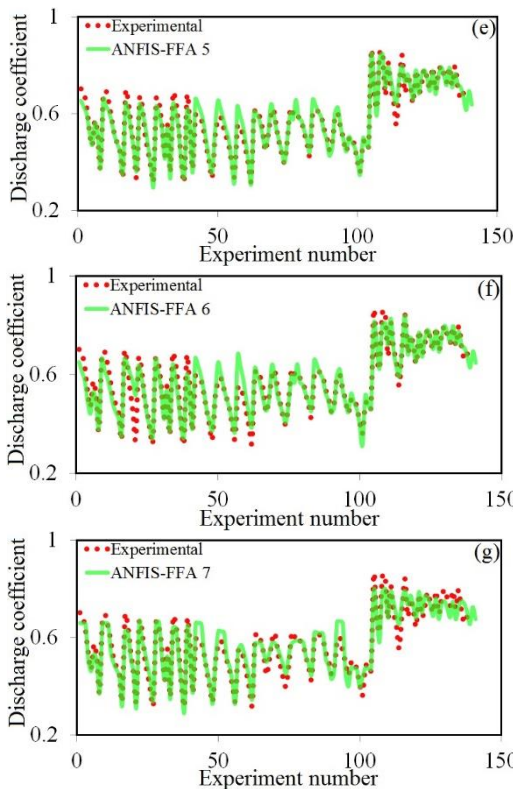
ترکیبی از کلیه پارامترهای ورودی (F_r , H_T/P , α , Lc/W) تخمین می‌زند. برای این مدل، مقادیر SI ، $RMSE$ و AIC به ترتیب برابر با ۰/۰۶۴، ۰/۰۳۷ و ۰/۳۱۱۴۷- تخمین زده شدند. در ادامه به بررسی مدل‌های ترکیبی از پنج پارامتر ورودی پرداخته می‌شود. مدل‌های ANFIS 2 to ANFIS 7 مقادیر تابع هدف را بر حسب پنج پارامتر ورودی تخمین می‌زنند. به عنوان مثال، مدل ANFIS 2 مقادیر ضریب دبی را بر حسب F_r , H_T/P , α , Lc/W , A/w شبیه‌سازی کرد. برای این مدل تاثیر پارامتر بدون بعد w/P حذف شده است. لازم به ذکر است که برای ANFIS 2 مقادیر MAE ، $RMSE$ و $Nash$ به ترتیب برابر با ۰/۰۳۹، ۰/۰۲۹ و ۰/۹۰۱ بدست آمدند. سپس به ارزیابی مدل ANFIS 3 پرداخته می‌شود. این مدل مقادیر ضریب دبی را بر حسب F_r , H_T/P , α , Lc/W , w/P پیش‌بینی کرد. به بیان دیگر برای این مدل تاثیر A/w نادیده گرفته شده است. برای این مدل مقادیر شاخص‌های آماری $Nash$ ، SI و MAE به ترتیب ۰/۹۰۷، ۰/۰۶۶ و ۰/۰۲۷ محاسبه شدند. مدل ANFIS 4 تابعی از F_r , H_T/P , α , A/w , w/P می‌باشد و برای تخمین ضریب دبی توسط این مدل تاثیر Lc/W نادیده گرفته شده است. برای مدل مذکور مقادیر MAE و SI به ترتیب مساوی با ۰/۰۲۷ و ۰/۰۶۵ محاسبه شده است. در میان کلیه مدل‌های هوش مصنوعی با پنج پارامتر ورودی، مدل ANFIS 5 مقادیر ضریب دبی را با دقت بیشتری شبیه‌سازی کرد. این مدل تابع F_r , H_T/P , Lc/W , A/w , w/P می‌باشد. برای این مدل تاثیر پارامتر α حذف شده است. مقادیر $Nash$ و SI برای ANFIS 5 به ترتیب مساوی با ۰/۹۴۱ و ۰/۰۵۴ محاسبه شد. بر اساس نتایج مدل‌سازی، مدل ANFIS 6 در میان کلیه مدل‌های هوش مصنوعی دارای کمترین مقدار همبستگی با مقادیر مشاهداتی است. برای تخمین ضریب دبی سرریزهای کنگره‌ای توسط این مدل تاثیر پارامترهای F_r , α , Lc/W , A/w , w/P در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که تاثیر پارامتر H_T/P حذف شده است. برای ANFIS 6 مقادیر SI و $RMSE$ به ترتیب



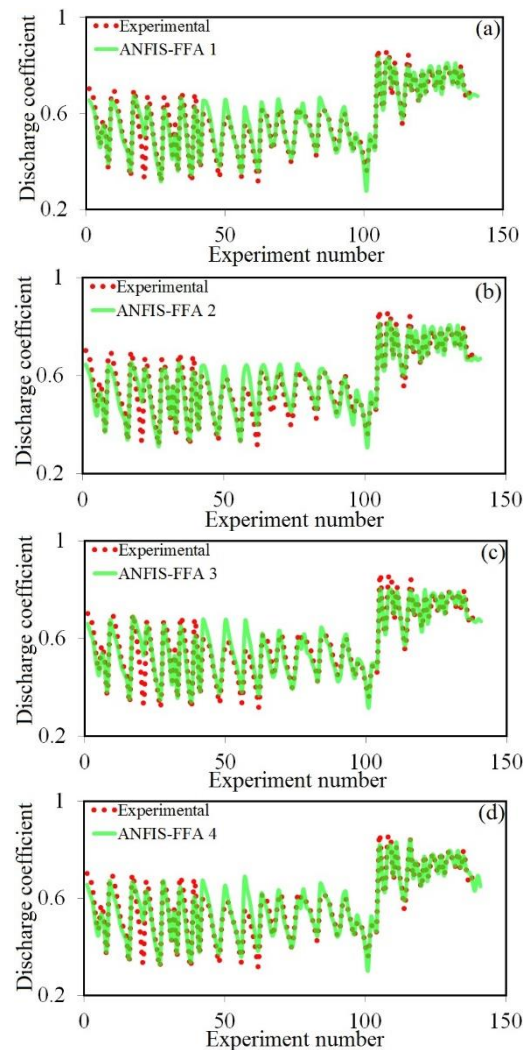
شکل ۳- مقایسه شاخص‌های آماری مختلف برای مدل‌های

ANFIS-FFA و ANFIS





شکل ۴- مقایسه مقادیر ضریب دبی مشاهداتی و شبیه-سازی برای مدل ANFIS 1 (a) ANFIS 2 (b) ANFIS 3 (c) ANFIS 4 (d) ANFIS 5 (e) ANFIS 6 (f) ANFIS 7 (g)

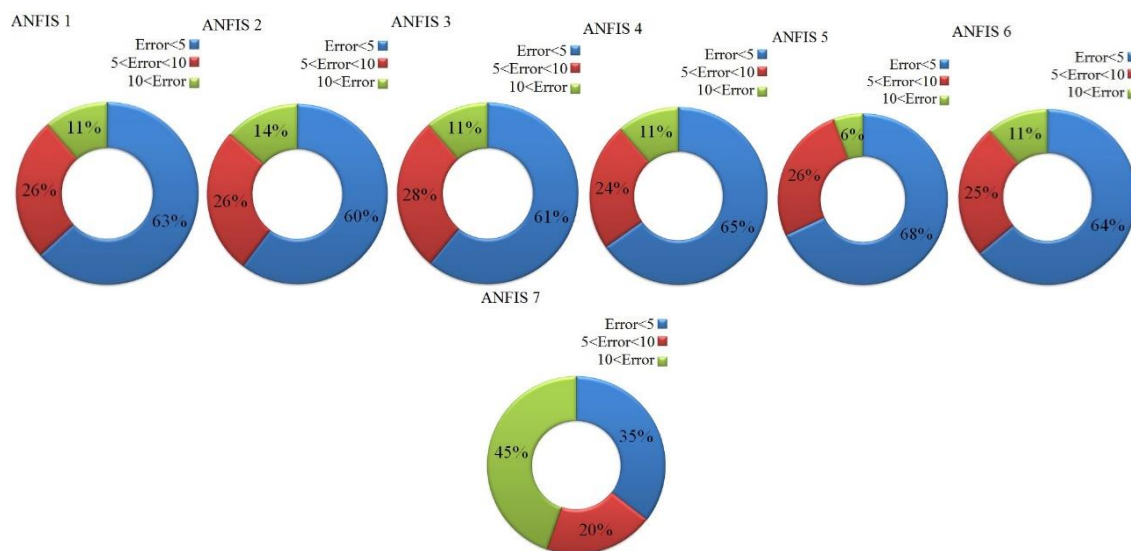


شکل ۵- مقایسه مقادیر ضریب دبی مشاهداتی و شبیه-سازی برای مدل ANFIS-FFA 1 (a) ANFIS-FFA 2 (b) ANFIS-FFA 3 (c) ANFIS-FFA 4 (d) ANFIS-FFA 5 (e) ANFIS-FFA 6 (f) ANFIS-FFA 7 (g)

در شکل ۶ توزیع خطا برای مدل‌های ۱ ANFIS تا ۷ ANFIS نشان داده شده است. بر اساس نتایج مدل‌سازی، مقدار R^2 برای ۱ ANFIS مساوی ۰/۹۱۹ محاسبه شد. همچنین حدوداً ۶۳ درصد نتایج تخمین زده شده توسط ۱ ANFIS دارای خطایی کمتر از ۵ درصد بودند. علاوه بر این تقریباً ۲۶ درصد نتایج این مدل دارای خطایی بین ۵ تا ۱۰ درصد بودند. همچنین مقدار شاخص R^2 برای مدل‌های ۲ ANFIS و ۳ ANFIS به ترتیب مساوی ۰/۹۱۲ و ۰/۹۱۵ تخمین زده شد. همچنین تقریباً ۱۱ درصد نتایج مدل ۳ ANFIS دارای خطایی بیشتر از ۱۰ درصد بودند. علاوه بر این مقدار ضریب تبیین برای مدل ۴ ANFIS برابر با ۰/۹۱۷ تخمین زده شد. برای مدل‌های ۵ ANFIS و ۶ ANFIS مقدار R^2 به ترتیب برابر با ۰/۹۴۴ و ۰/۹۱۱ محاسبه شد. برای مدل ۵ ANFIS نیز تقریباً ۶۵ درصد نتایج خطایی کمتر از ۵ درصد داشتند و

۵ درصد بود. لازم به ذکر است که مقدار R^2 برای مدل SAELM 7 برابر با ۰/۵۶۲ بود و حدوداً ۴۵ درصد نتایج مدل مذکور مقدار خطای بیشتر از ۱۰ درصد داشتند.

تقریباً یک چهارم نتایج این مدل خطایی کمتر از ۱۰ درصد و بیشتر از ۵ درصد به خود اختصاص دادند. به بیان دیگر این مدل در مقایسه با سایر مدل‌های ANFIS دارای معناداری آماری قابل توجهی بود. با توجه به نتایج توزیع خطا، تقریباً ۶۴ درصد نتایج مدل ANFIS 6 کمتر از



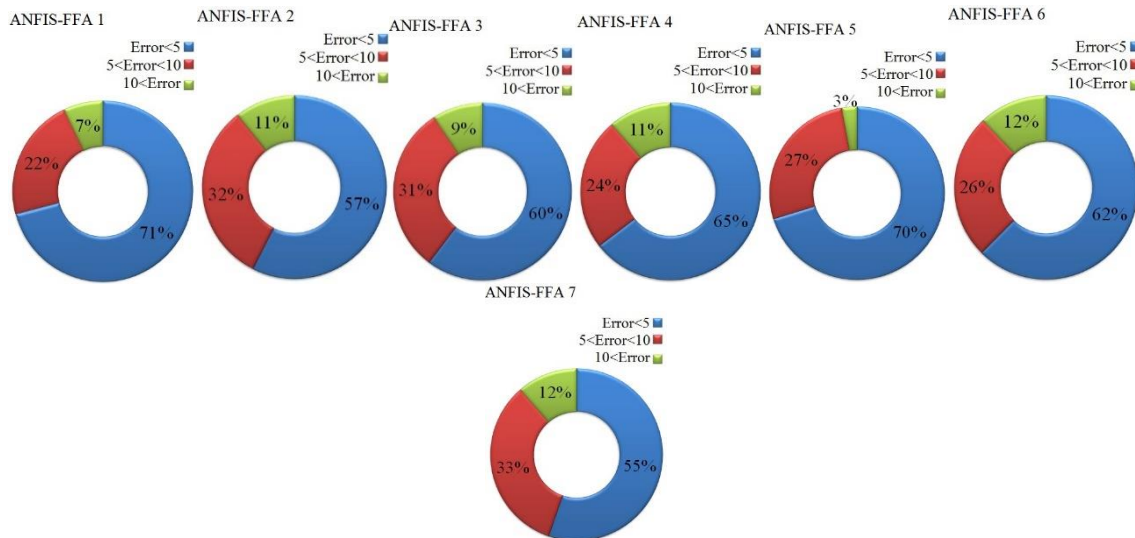
شکل ۶- نمودارهای توزیع خطا برای مدل‌های مختلف ANFIS.

درصد دارند. این در حالی است که مقدار شاخص R^2 برای مدل‌های 4 ANFIS-FFA، 5 ANFIS-FFA و ANFIS-6 FFA به ترتیب مساوی با ۰/۹۲۰، ۰/۹۵۳ و ۰/۹۱۶ تخمین زده شده‌اند. برای مدل 5 ANFIS-FFA تقریباً ۷۰ مقادیر شبیه‌سازی شده خطایی کمتر از ۵ درصد دارند و تنها ۳ درصد ضرایب دبی مدل‌سازی شده توسط این مدل خطایی بیشتر از ۱۰ به خود اختصاص داده‌اند. برای مدل 5 ANFIS-FFA تقریباً ۲۴ درصد از ضرایب دبی‌های پیش‌بینی شده دارای خطایی بین ۵ تا ۱۰ درصد داشتند. به بیان دیگر، مدل 5 ANFIS-FFA در مقایسه با سایر مدل‌های هیبریدی دارای معناداری آماری بیشتری بود. همچنین، مقدار ضریب تبیین برای 7 ANFIS-FFA مساوی با ۰/۹۱۳ می‌باشد که تقریباً نیمی از ضرایب دبی مدل‌سازی شده توسط این مدل خطایی کمتر از ۵ درصد دارند.

در شکل ۷ نیز نمودارهای پراکنندگی و توزیع خطا برای مدل‌های ANFIS-FFA مختلف نشان داده شده است. بر اساس نتایج شبیه‌سازی‌ها، مدل‌های هیبریدی ANFIS-FFA مقادیر تابع هدف را که در اینجا ضریب دبی است را با دقت بیشتری در مقایسه با مدل‌های ANFIS متناظر با خود تخمین زدند. به عنوان مثال، مقدار R^2 برای مدل 1 ANFIS-FFA مساوی با ۰/۹۳۴ محاسبه شده است. علاوه بر این، تقریباً ۲۲ درصد نتایج این مدل خطایی بین ۵ تا ۱۰ درصد دارند. این در حالی است که شاخص آماری ضریب تبیین برای مدل‌های 2 ANFIS-FFA و 3 ANFIS-FFA به ترتیب برابر با ۰/۹۱۹ و ۰/۹۱۱ محاسبه شده‌اند. لازم به ذکر است که حدوداً ۵۷ درصد ضرایب دبی‌های شبیه‌سازی شده توسط 2 ANFIS-FFA دارای مقدار خطایی کمتر از ۵ درصد هستند. همچنین، تقریباً یک سوم نتایج مدل 3 ANFIS-FFA خطایی بین ۵ تا ۱۰

که با تجزیه و تحلیل نتایج مدل‌سازی‌ها، مدل برتر هیبریدی شناسایی گردید و عدد فرود نیز به‌عنوان موثرترین پارامتر ورودی معرفی شد.

همان‌گونه که مشاهده شد، الگوریتم کرم شبتاب، مدل ANFIS را به درستی بهینه‌سازی نمود و دقت شبیه‌سازی را به شکل قابل ملاحظه‌ای افزایش داد. لازم به ذکر است



شکل ۷- نمودارهای توزیع خطا برای مدل‌های مختلف ANFIS-FFA.

می‌شود. در ادامه با استفاده از $\pm 1/64 S_e$ به صورت تقریبی منجر به ۹۵ درصد باند اطمینان می‌گردد. در جدول ۲ نیز پارامترهای بدست آمده برای تحلیل عدم قطعیت مدل‌های ANFIS 5 و ANFIS-FFA 5 نشان داده شده است. با توجه به تحلیل عدم قطعیت، هر دو مدل ANFIS 5 و ANFIS-FFA 5 دارای عملکردی کمتر از واقعی بودند. به عنوان مثال، میانگین خطای پیش‌بینی برای مدل ANFIS 5 مساوی با $-0/003$ محاسبه شد. همچنین ۹۵٪ فاصله خطای پیش‌بینی نتایج ضریب دبی تخمین زده شده توسط ANFIS-FFA 5 بین $-0/003$ و $0/003$ بودند. همچنین انحراف استاندارد خطای پیش‌بینی برای ANFIS-FFA 5 برابر با $0/029$ بود.

مقایسه با سایر مطالعات

در جدول ۳ مقایسه مدل هیبریدی برتر در مطالعه حاضر و مدل‌های ANFIS و GEP ارائه شده توسط روشنگر و همکاران (۲۰۱۷) قابل مشاهده است. به‌عنوان مثال، مقادیر ضریب نش و ضریب همبستگی برای مدل ANFIS ارائه شده توسط روشنگر و همکاران (۲۰۱۷) به ترتیب

تحلیل عدم قطعیت

در ادامه، تحلیل عدم قطعیت مدل‌های ANFIS 5 و ANFIS-FFA 5 انجام می‌شود. تحلیل عدم قطعیت برای ارزیابی خطای پیش‌بینی شده توسط مدل‌های هوش مصنوعی مورد استفاده قرار می‌گیرد که در آن مقدار خطای پیش‌بینی شده توسط مدل هوش مصنوعی (e_j) به صورت تفاضل بین مقادیر ضریب دبی پیش‌بینی شده (P_j) و مقادیر مشاهداتی (T_j) محاسبه می‌گردد

$(e_j = P_j - T_j)$. همچنین مقدار میانگین خطای پیش‌بینی شده به صورت $\bar{e} = \sum_{j=1}^n e_j$ بدست می‌آید. علاوه بر این مقدار انحراف استاندارد مقادیر خطای پیش‌بینی شده نیز به صورت $S_e = \sqrt{\sum_{j=1}^n (e_j - \bar{e})^2 / n - 1}$ تعریف می‌شود.

منفی بودن مقدار \bar{e} نشان دهنده عملکرد کمتر از واقعی بودن^۲ مدل عددی است. در مقابل مثبت بودن \bar{e} به معنای عملکرد بیشتر از واقعی بودن^۳ مدل عددی مذکور است. لازم به ذکر است که، با استفاده از پارامترهای \bar{e} و S_e یک باند اطمینان در اطراف مقادیر پیش‌بینی از یک خطا توسط روش ویلسون بدون تصحیح پیوستگی تولید

³ Overestimated performance

² Underestimated performance

توجه شود که در هر دو مدل برتر ارائه شده توسط این محقق نیز یک مدل در دو شاخص بهتر از دیگری عمل کرده و در شاخص دیگر عملکرد ضعیف‌تری از خود نشان داده است. به‌طور کلی هدف اصلی در این مطالعه، بررسی تاثیر الگوریتم بهینه‌سازی کرم شبتاب بر روی عملکرد مدل ANFIS بود که این مهم به‌درستی انجام شد.

مساوی با ۰/۹۲۲ و ۰/۹۸۲ بودند و برای مدل GEP نیز به‌ترتیب برابر با ۰/۹۲۹ و ۰/۹۸۸ محاسبه شدند. همان‌طور که دیده می‌شود، ضریب همبستگی برای مدل‌های ارائه شده توسط روشنگر و همکاران (۲۰۱۷) بزرگتر بود ولی در مقابل ضریب نش مدل هیبریدی ANFIS-FFA بیشتر از مدل‌های این محقق بود. بنابراین، اگر چه مدل‌های ارائه شده توسط روشنگر و همکاران (۲۰۱۷) در دو شاخص دارای عملکرد بهتری بودند ولی باید

جدول ۲- نتایج تحلیل عدم قطعیت برای مدل‌های برتر هوش مصنوعی.

مدل	تعداد نمونه	میانگین خطای پیش‌بینی	انحراف معیار	عرض باند اطمینان	۹۵ درصد فاصله خطای پیش‌بینی
ANFIS 5	۳۴۷	-۰/۰۰۳	۰/۰۳۲	-۰/۰۰۴	۰/۰۰۱ تا -۰/۰۰۶
ANFIS-FFA 5	۳۴۷	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۲۹	-۰/۰۰۳	۰/۰۰۳ تا -۰/۰۰۳

جدول ۳- مقایسه مدل هیبریدی برتر در مطالعه حاضر و مدل‌های ANFIS و GEP ارائه شده توسط روشنگر و همکاران (۲۰۱۷).

مدل	R	MAE	RMSE	SI	MAE	AIC	Nash
ANFIS-FFA	۰/۹۷۶	۹۵/۲۹۴	۰/۰۲۸	۰/۰۴۹	۰/۰۲۱	-۴۶۹/۰۲۹	۰/۹۵۱
ANFIS	۰/۹۸۲	-	۰/۰۱۶	-	-	-	۰/۹۲۲
GEP	۰/۹۸۸	-	۰/۰۲۶	-	-	-	۰/۹۲۹

نتیجه‌گیری کلی

FFA نشان داد که الگوریتم کرم شبتاب عملکرد مدل ANFIS را به شکل قابل توجهی بهبود داد. همچنین، با تجزیه و تحلیل نتایج مدل‌سازی مدل برتر (ANFIS-FFA) (5) و موثرترین پارامتر (عدد فرود) معرفی شدند. مقادیر R^2 ، $RMSE$ و $Nash$ برای آن به‌ترتیب مساوی با ۰/۹۵۳، ۰/۰۲۸ و ۰/۹۵۱ محاسبه شدند. همچنین تنها ۳ درصد ضریب دبی‌های شبیه‌سازی شده توسط مدل برتر دارای خطایی بیشتر از ۱۰ درصد بودند. بنابراین، نتایج مدل برتر به طور معناداری با مقادیر مشاهداتی همبستگی داشت. علاوه بر این، تحلیل عدم قطعیت برای مدل‌های برتر اجرا شد که نشان داد مدل ANFIS-FFA 5 دارای عملکردی کمتر از مقدار واقعی بود. در انتها، نتایج مدل

در این مطالعه برای اولین بار، با استفاده از مدل سیستم استنتاج عصبی-فازی سازگار (ANFIS) و مدل هیبریدی الگوریتم کرم شبتاب-سیستم استنتاج عصبی-فازی سازگار (ANFIS-FFA) ضریب دبی سرریزهای کنگره‌ای شبیه‌سازی شدند. علاوه بر این، برای بهبود دقت نتایج مدل‌های هوش مصنوعی از شبیه‌سازی مونت کارلو و برای صحت سنجی نتایج آنها از روش اعتبار سنجی چند لایه استفاده گردید. ابتدا مهمترین پارامترهای ورودی برای تخمین ضریب دبی سرریزهای کنگره‌ای معرفی شدند و سپس با استفاده از این پارامترهای ورودی، برای هر یک از مدل‌های ANFIS و ANFIS-FFA هفت حالت تعریف گردید. مقایسه مدل‌های ANFIS و ANFIS-

هیبریدی برتر با مدل‌های هوش مصنوعی سایر محققین
نیز مقایسه شد.

منابع مورد استفاده

- Azimi H, Bonakdari H and Ebtehaj I, 2019. Design of radial basis function-based support vector regression in predicting the discharge coefficient of a side weir in a trapezoidal channel. *Applied Water Science* 9(4): 78.
- Bagheri S and Heidarpour M, 2010. Application of free vortex theory to estimate discharge coefficient for sharp-crested weirs. *Biosystems Engineering* 105(3): 423-427.
- Buragohain M and Mahanta C, 2008. A novel approach for ANFIS modelling based on full factorial design. *Applied Soft Computing* 8(1): 609-625.
- Carollo FG, Ferro V and Pampalone V, 2017. Testing the outflow process over a triangular labyrinth weir. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* 143(8): 06017007.
- Chanson H and Wang H, 2013. Unsteady discharge calibration of a large V notch weir. *Flow Measurement and Instrumentation* 29: 19-24.
- Ebtehaj I, Bonakdari H and Shamshirband S, 2016. Extreme learning machine assessment for estimating sediment transport in open channels. *Engineering with Computers* 32(4): 691-704. doi:10.1007/s00366-016-0446-1.
- Esmailpour L, Farsadizadeh D and Hosseinzadeh Dalir A, 2016. Study of hydraulic properties of labyrinth semi-circular one sided weir. *Water and Soil Science- University of Tabriz*, 26(1):187-195. (In Persian with English abstract)
- Haghiabi AH, Parsaie A and Ememgholizadeh S, 2017. Prediction of discharge coefficient of triangular labyrinth weirs using Adaptive Neuro Fuzzy Inference System. *Alexandria Engineering Journal* 57:1773-1782.
- Kumar S, Ahmad Z and Mansoor T, 2011. A new approach to improve the discharging capacity of sharp-crested triangular plan form weirs. *Journal of Flow Measurement and Instrumentation* 22(3): 175-180.
- Roushangar K, Alami MT, Majedi Asl M and Shiri J, 2017. Modeling discharge coefficient of normal and inverted orientation labyrinth weirs using machine learning techniques. *ISH Journal of Hydraulic Engineering* 23(3): 331-340.
- Roushangar K, Alami MT, Shiri J and Asl MM, 2018. Determining discharge coefficient of labyrinth and arced labyrinth weirs using support vector machine. *Hydrology Research* 49(3): 924-938.
- Roushangar K, Alami MT, Shiri J and Asl MM, 2017. Determination of discharge coefficient of labyrinth and arced labyrinth weirs by support vector regression method. *Water and Soil Science-University of Tabriz* 27(1):173-186. (In Persian with English abstract)
- Seamons TR, 2014. Labyrinth weirs: a look into geometric variation and its effect on efficiency and design method predictions. Master of Science thesis. Utah State University. USA.
- Yang XS, 2010. firefly algorithm, stochastic test functions and design optimization. *International Journal of Biological Macromolecules* 2(2): 78-84.