

## مقاله پژوهشی

# حل تحلیلی معادله‌ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی با استفاده از تابع فوق‌هندسی گوس

مهدی فولادی پناه\*<sup>۱</sup>، مهدی ماجدی اصل<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۶/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۰۹

۱- استادیار، گروه عمران، واحد رامهرمز، دانشگاه آزاد اسلامی، رامهرمز

۲- استادیار، دانشکده فنی-مهندسی، گروه عمران، دانشگاه مراغه، مراغه

\* مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: fuladipanah@gmail.com

## چکیده

وجود سازه‌های هیدرولیکی در مسیر جریان باعث ایجاد جریان متغیر تدریجی (GVF) می‌شود که محاسبه‌ی تغییرات سنجه‌های هیدرولیکی بر مبنای حل معادله‌ی دینامیکی جریان با دقت بسیار زیاد از اهمیت ویژه‌ای بین پژوهشگران برخوردار است. در این پژوهش، ضمن بی‌بعدسازی معادله‌ی دینامیکی GVF در قالب دو روش  $y_n$ -مبنا و  $y_c$ -مبنا، از تابع فوق‌هندسی گوس برای حل تحلیلی این معادله برای پنج شیب ملایم (M)، تند (S)، بحرانی (C)، افقی (H) و معکوس (A) استفاده شده است. همچنین با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی جمع‌آوری شده از یک کانال مستطیلی، مقایسه‌ای بین دقت محاسبه‌ی روش حل تحلیلی تابع فوق‌هندسی گوس و روش عددی رونگ‌کوتا مرتبه‌ی چهار بر مبنای شاخص‌های مجذور میانگین مربعات خطا (RMSE)، ضریب تبیین ( $R^2$ ) و متوسط درصد خطا (E) برای پروفیل‌های نوع M1، S2 و C3 انجام گرفته است. مقدار شاخص‌های RMSE و  $R^2$  برای پروفیل‌های M1، S2 و C3 در حل‌گر تحلیلی فوق‌هندسی گوس به ترتیب (۰/۰۱۷۳، ۰/۰۹۹۸۶)، (۰/۰۱۶۷، ۰/۰۹۹۸۴) و (۰/۰۲۰۴، ۰/۰۹۹۸۸) و در حل‌گر عددی رونگ‌کوتای مرتبه‌ی چهار به ترتیب (۰/۰۴۵۸، ۰/۰۹۸۶۴)، (۰/۰۲۵۹، ۰/۰۹۹۱) و (۰/۰۳۲۷، ۰/۰۹۸۶۹) به دست آمدند. نتایج پژوهش نشان داد استفاده از حل‌گر تحلیلی تابع فوق‌هندسی گوس برای حل معادله‌ی دیفرانسیلی جریان GVF، از دقت بسیار زیادی برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: پروفیل سطح آب، تابع فوق‌هندسی گوس، روش تحلیلی، روش عددی، جریان متغیر تدریجی

# Analytical Solution of Dynamic Equation of Gradually Varied Flow Using Gaussian Hyper-Geometric Function

M.Fuladipanah<sup>1</sup>, M. MajediAsl<sup>2\*</sup>

Received: September 16, 2017

Accepted: December 29, 2020

<sup>1</sup> Assis. Prof., Dept. of Civil Engineering, Ramhormoz Branch, Islamic Azad University, Ramhormoz, Iran

<sup>2</sup> Assis. Prof., Dept. of Civil Engineering, Maragheh University, Maragheh, Iran

\* Corresponding Author, Email: fuladipanah@gmail.com

## Extended abstract

### Background and Objectives

Gradually varied flow is one of the common profiles of open channel flow which takes place in canals and natural conduits due to hydraulic structures and morphological causes. Spatial variations of flow characteristics is one of the most apparent properties of gradually varied flow that its precise calculation through accurate solution of dynamic equation of gradually varied flow has significant role. Three main approaches to solve dynamic equation of gradually varied flow are analytical, numerical and graphical ones. Of these mentioned methods, direct integration of dynamic equation of gradually varied flow is the most accurate method. Gaussian hyper-geometric functions (GHF), which has been considered in this research work, is one of the approaches to integrate directly of dynamic equation of gradually varied flow. Creation of dimensionless form of dynamic equation of gradually varied flow is the basis of the GHF method. This is done using normal depth of flow ( $y_n$ -based method) or critical depth of flow ( $y_c$ -based method). At the end of the paper, a comparison has been performed between GHF method and Rong-Kutta numeric method to predict GVF profile in a rectangular laboratory flume for three M1, S2 and C3 profiles.

### Methodology

The GHF solver ( ${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)k!} z^k$ ) has been implemented to integrate differential dynamic equation of GVF  $\left[ \frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{\cos \theta \frac{Q^2 T}{gA^3}} \right]$  for five channel slopes including Mild (M), Steep (S), Horizontal (H),

Critical (C) and Adverse (A). Dimensionless form of GVF equation makes it easy to integrate using GHF solver. Due to the absence of normal depth for horizontal and adverse slopes,  $y_c$  was used to produce dimensionless form of GVF equation for H and A slopes. Other three slopes were made dimensionless using  $y_n$ . For the first scenario, two dimensionless parameters were defined as  $v = \frac{y}{y_c}$  and  $x_{\#} = x \frac{S_0^*}{y_c}$ . The correspondes

parameters for the second scenario were  $u = \frac{y}{y_n}$  and  $x_{\#} = \frac{x S_0^*}{y_n}$ . The final integrated forms of the GVF equation include the hydraulic exponents as M and N which can be solved for certain values of M and N. To compare the results between numerical (Runge-Kutta 4th order method) and analytical (GHF) solvers, laboratory GVF data measured from a rectangular flume of length 7 m, width 0.1 m, height 0.3 m and roughness 0.011 were used. Three profiles as M1, S2 and C3 were formed experimentally to measure the GVF characteristics. Also, three performance assessment indices as RMSE, R2 and E were applied to compare the solvers accuracy.

### Findings

Two analytical answers (overall 10 answers) were obtained to solve gradually varied flow dynamic equation. The first group belongs to the channels of slope types namely M, S and C. The second one can be used for the slopes of types H and A. These two mentioned group answers should be used according to the profile name and corresponding zone. Regarding to the laboratory measured data of GVF profiles, results showed that application of GHF not only resolve discretization selection for numerical methods, but also predicts GVF profile characteristics more accurate than to the numerical Rong-Kutta 4th order solver. The amount of the (RMSE, R2, E) for the M1, S2 and C3 profiles for GHF were (0.0173, 0.9986, 1.11), (0.0167, 0.9984, 1.12) and (0.0204, 0.9988, 0.985), respectively; while the corresponding values of numerical solver were calculated as (0.0458, 0.9864, 4.05), (0.0259, 0.991, 2.38) and (0.0327, 0.985, 3.65). These values prove the superiority of GHF predictor.

### Conclusion

Gradually varied flow profiles are common at the flow conduits with hydraulic structures. Predicting flow characteristics of GVF can be achievable through solving differential dynamic equation. In this paper, GHF was applied to solve the equation analytically. The obtained analytical answers can be used for all zones of five channel slope types.

**Keywords:** Analytical solution, Gaussian hyper-geometric function, Gradually varied flow, Numerical solution, Water surface profile.

نیز برخوردار خواهد بود. چاو (۱۹۵۹)، سویرامانیا (۲۰۰۹)، ونتولی (۲۰۰۴) و جان (۲۰۱۲) به کمک عمق نرمال و چن و وانگ (۱۹۶۹) به کمک عمق بحرانی در استفاده از این روش، معادله ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی را به صورت بی بعد یا نرمال تبدیل نمودند و سپس انتگرال گیری مستقیم را روی آن انجام دادند. تلاش بسیاری توسط پژوهشگران برای گسترش استفاده از روش انتگرال گیری مستقیم انجام شده است. برس (۱۸۶۰) برای اولین بار تابع جریان متغیر را به منظور انتگرال گیری ارائه داد. بختف (۱۹۳۲)، چاو (۱۹۵۵ و ۱۹۵۷) و کومار (۱۹۷۸ و ۱۹۷۹) نیز حل این تابع را توسعه دادند. بعد از بی بعد کردن معادله ی جریان متغیر تدریجی با استفاده از معادله های مقاومت جریان، شزی یا مانینگ، و به کمک نمای اول و دوم هیدرولیکی،  $M$  و  $N$ ، عمل انتگرال گیری انجام می گیرد. مقدارهای  $M$  و  $N$  اعداد ثابتی نیستند و بسته به نوع شکل مقطع عرضی تابعی از خصوصیات جریان و کانال هستند. از جمله اشکال های استفاده از این راه حل، انجام عمل درونیابی برای محاسبه ی تابع جریان متغیر تدریجی به ازای مقدارهای مختلف  $M$  و  $N$  برای انتگرال گیری است که باعث بروز خطا در محاسبات می شود. به منظور رفع این نقصان، جان و چن (۲۰۱۲) استفاده از تابع فوق هندسی گوس را برای انتگرال گیری مستقیم از معادله ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی برای کانال های عریض پیشنهاد دادند. در پژوهشی دیگر، جان و چن (۲۰۱۳) با استفاده از تابع فوق هندسی گوس، معادله ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی را با استفاده از عمق بحرانی بی بعد نمودند و سپس معادله -های منتج را برای کانال هایی با شیب معکوس، افقی، ملایم و تند مورد استفاده قرار دادند. وطن خواه (۲۰۱۵)

## مقدمه

محاسبه ی پروفیل سطح آب در جریان های متغیر تدریجی در مجاری روباز یکی از کاربردی ترین مباحث در مهندسی هیدرولیک می باشد. چاو (۱۹۵۹) و هندرسون (۱۹۶۹) روش های محاسبه ی پروفیل های جریان متغیر تدریجی را مورد بررسی و مطالعه قرار داده اند. این روش ها در سه گروه عمده شامل روش های تحلیلی، عددی و گرافیکی تقسیم بندی می شوند. از بین این روش ها، استفاده از روش های تحلیلی با توجه به دقت بسیار زیاد آن از جایگاه ویژه ای بین پژوهشگران و مهندسان هیدرولیک برخوردار است. روش انتگرال-گیری در ابتدا برای کانال های غیرمنشوری مورد استفاده قرار می گرفت. در برخی حالات خاص مانند کانال های مصنوعی، معادله ی جریان متغیر تدریجی به اندازه ای ساده می شود که معادله ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی با استفاده از روش انتگرال گیری مستقیم قابل حل می شود. روش های تحلیلی، مبتنی بر روش انتگرال گیری از معادله ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی هستند که خود به سه حالت انتگرال گیری مستقیم، انتگرال گیری غیرمستقیم و انتگرال گیری عددی انجام می شوند. انتگرال گیری عددی معادله ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی به منظور محاسبه ی پروفیل سطح آب در کانال های غیرمنشوری استفاده می شود. استفاده از روش انتگرال گیری مستقیم یا انتگرال گیری غیرمستقیم در برخی کانال های منشوری مانند کانال های مصنوعی امکان پذیر است. محاسبه ی طول پروفیل جریان متغیر تدریجی در یک گام محاسباتی از مهمترین ویژگی های روش انتگرال گیری مستقیم است. روشن است استفاده از روشی که قادر به انجام چنین محاسباتی باشد ضمن کاهش زمان محاسبات، از خطای محاسباتی بسیار کمی

طبق تعریف، تابع فوق هندسی گوس به صورت زیر

بیان می‌شود (اولدالهیوس ۲۰۱۰):

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)k!} z^k \quad [1]$$

که در آن  $\Gamma(a)$ ،  $\Gamma(b)$  و  $\Gamma(c)$  تابع‌های گاما،  $a$ ،  $b$  و  $c$  پارامترهای تابع گاما و  $z$  متغیر می‌باشند. سری بی-نهایت [۱] به ازای تمام مقادیرهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  همگرا است البته به شرطی که نامساوی  $|z| < 1$  برقرار باشد. عبارت انتگرال‌گیری که در حل معادله‌ی جریان متغیر تدریجی ظاهر می‌شود به فرم  $\int \frac{u^\theta}{1 \mp (\alpha u)^\psi} du$  است که طبق تعریف می‌توان نوشت:

$$\int \frac{u^\theta}{1 \mp (\alpha u)^\psi} du = \frac{u^{\theta+1}}{\theta+1} {}_2F_1\left(1, \frac{\theta+1}{\psi}; \frac{\theta+1}{\psi} + 1; \pm (\alpha u)^\psi\right) + C \quad [2]$$

معادله‌های [۱] و [۲] نشان می‌دهند که در این حالت خاص  $a=1$ ،  $b = \frac{\theta+1}{N}$  و  $c = \frac{\theta+1}{N} + 1$  هستند. متغیر تابع گاما نیز برابر با  $z = u^\psi$  است. در این حالت رابطه‌ی بین پارامترهای تابع گاما به قرار  $a=1$  و  $c=b+1$  می‌باشند. پس می‌توان نوشت:

$${}_2F_1(1,b;b+1;z) = b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{b+k} \quad [3]$$

تابع فوق هندسی گوس مورد استفاده در این پژوهش به فرم معادله‌ی [۳] خواهد بود. والفریم (۱۹۹۶) نشان داد به منظور سادگی عبارت  ${}_2F_1(1,b;b+1;z)$  با نماد  $g(b,z)$  نمایش داده می‌شود. به عبارتی می‌توان نوشت:

$$g(b,z) = b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{b+k} = 1 + \frac{bz}{b+1} + \dots + \frac{bz^k}{b+k} + \dots \quad [4]$$

بنابراین، با ترکیب معادله‌های [۲] و [۴] معادله‌ی نهایی زیر حاصل می‌شود:

$$\int \frac{u^\theta}{1 \mp (\alpha u)^\psi} du = \frac{u^{\theta+1}}{\theta+1} g\left(\frac{\theta+1}{\psi}, \pm (\alpha u)^\psi\right) + C \quad [5]$$

### معادله‌ی جریان متغیر تدریجی

معادله‌ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی به قرار زیر است:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{\cos \theta \frac{\alpha Q^2 T}{g A^3}} = S_0^* \frac{1 - \frac{S_f}{S_0}}{1 - \frac{\alpha Q^2 T}{g A^3 \cos \theta}} = S_0^* \frac{1 - \frac{S_f}{S_0}}{1 - Fr^2} \quad [6]$$

که در این معادله  $y$  عمق جریان،  $x$  فاصله‌ی مکانی از مبدا محاسبات،  $S_0$  شیب کف کانال،  $S_f$  شیب خط انرژی،  $\theta$  زاویه‌ی شیب کف کانال با راستای افق،  $Q$  دبی

با استفاده از تابع فوق هندسی گوس، حل غیرمستقیم معادله‌ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی را برای کانال-های مدور با ضریب زبری متغیر ارائه نمود. حل وی منجر به ارائه‌ی راه‌حل یک مرحله‌ای برای محاسبه‌ی پروفیل‌های جریان متغیر تدریجی در کانال‌های مدور شد. هایک (۲۰۱۶) از تابع فوق هندسی گوس برای حل تحلیلی معادله‌ی انتقال ریچاردز به منظور محاسبه‌ی پروفیل‌های آب استفاده نمود. معادله‌هایی که وی استخراج نمود برای استفاده در زمینه‌ی مقایسه‌ی بین مدل‌ها، صحت‌سنجی و نیز درک بهتر از تاثیر سنج‌های هیدرولیکی موثر در معادله‌ی انتقال ریچاردز قابل کاربرد است.

همانطور که از سابقه‌ی پژوهش برمی‌آید نتیجه‌های کاربرد تابع فوق هندسی گوس در حل معادله‌های دیفرانسیل، بسیار رضایتبخش و قابل استناد می‌باشد. اما در این بین، استفاده از تابع گوس برای دستیابی به حل عمومی معادله‌ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی برای مقاطع عرضی خاص و تحت شرایط محدودی از سنج‌های فیزیکی و هیدرولیکی انجام شده است. در این پژوهش به منظور دستیابی به معادله‌هایی که برای تمام شرایط برقرار باشند استفاده از تابع فوق هندسی گوس برای حل مستقیم معادله‌ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی در دو حالت (الف) بی‌بعدسازی براساس عمق نرمال ( $y_n$ -مبنا)؛ (ب) بی‌بعدسازی براساس عمق بحرانی ( $y_c$ -مبنا) مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین به صورت موردی پروفیل بی‌بعد جریان در دو مقطع مستطیلی و مثلثی تحت شرایط مختلف مرزی با استفاده از این روش تحلیل شده‌اند. در نهایت پروفیل سطح آب شبیه‌سازی شده در یک کانال آزمایشگاهی به کمک روش حل ارائه شده در این پژوهش با پروفیل مشاهده‌ای مورد مقایسه و ارزیابی قرار گرفته‌اند.

### مواد و روش‌ها

#### تابع فوق هندسی گوس

با بازنویسی معادله ی [۱۳] می توان نوشت:

$$\frac{dx_*}{du} = \frac{-u^N + \lambda^M u^{N-M}}{1-u^N} = 1 - \frac{1}{1-u^N} + \frac{\lambda^M u^{N-M}}{1-u^N} \quad [۱۴]$$

با توجه به معادله ی [۱۰] دو حالت برای انتگرال-گیری از معادله ی [۱۴] براساس معادله ی [۵] وجود خواهد داشت. حالت اول، وضعیتی است که  $|u| < 1$  می-باشد. این حالت بیانگر شرط همگرایی معادله ی [۴] است. در این صورت انتگرال-گیری از معادله ی [۱۴] با استفاده از معادله ی [۵] منجر به رابطه ی زیر می شود:

$$x_* = u - \int_0^u \frac{1}{1-u^N} du + \lambda^M \int_0^u \frac{u^{N-M}}{1-u^N} du = u - u g\left(\frac{1}{N}, u^N\right) + \lambda^M \frac{u^{N-M+1}}{N-M+1} g\left(\frac{N-M+1}{N}, u^N\right) + C. \quad [۱۵]$$

که مقدار ثابت با توجه به شرایط مرزی قابل تعیین خواهد بود. حالت دوم، بیانگر وضعیتی است که شرط همگرایی معادله ی [۴] برقرار نیست، یعنی حالتی که  $|u| > 1$  است. در این وضعیت، متغیر جدید  $w$  به فرم  $w = u^{-1}$  و  $|w| < 1$  تعریف می شود که منجر به برقراری رابطه ی [۵] خواهد شد. حال می توان نوشت:

$$u = w^{-1} \rightarrow du = -w^{-2} dw \rightarrow \frac{dw}{dx_*} = \frac{1-w^N}{-w^2 + \lambda^M w^{M-2}} \quad [۱۶]$$

در این صورت رابطه ی زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{dx_*}{dw} = -w^{-2} \frac{w^{N-2}}{1-w^N} + \lambda^M \frac{w^{M-2}}{1-w^N} \quad [۱۷]$$

بنابراین می توان نوشت:

$$x_* = w^{-1} - \int_0^w \frac{w^{N-2}}{1-w^N} dw + \lambda^M \int_0^w \frac{w^{M-2}}{1-w^N} dw + C. \quad [۱۸]$$

حل معادله ی [۱۸] برحسب تابع فوق هندسی گوس

منجر به رابطه زیر می شود:

$$x_* = w^{-1} \left[ 1 - \frac{w^N}{N-1} g\left(\frac{N-1}{N}, w^N\right) \right] + \frac{\lambda^M w^{M-1}}{M-1} g\left(\frac{M-1}{N}, w^N\right) + C. \quad [۱۹]$$

حال با جاگذاری  $u = w^{-1}$  معادله ی [۱۹] برحسب  $u$  به

فرم زیر قابل بازنویسی است:

$$x_* = u - \frac{u^{1-N}}{N-1} g\left(\frac{N-1}{N}, u^N\right) + \lambda^M \frac{u^{1-M}}{M-1} g\left(\frac{M-1}{N}, u^N\right) + C. \quad [۲۰]$$

پارامتر  $\lambda$  تعیین کننده ی نوع شیب کانال است که در

جدول ۱ نشان داده شده است.

جریان،  $A$  مساحت مقطع عرضی جریان،  $g$  شتاب ثقل،  $T$  عرض سطح آزاد آب، و  $Fr$  عدد فرود است. با استفاده از معادله ی مانینگ، معادله ی [۶] را می توان به فرم زیر نوشت:

$$\frac{dy}{dx} = S_0^* \frac{1 - \left(\frac{y}{Y}\right)^N}{1 - \left(\frac{y}{Y}\right)^M} \quad [۷]$$

که در این معادله  $M$  و  $N$  به ترتیب نمای اول و دوم هیدرولیکی هستند. این دو متغیر از رابطه های زیر محاسبه می شوند:

$$M = \frac{y}{A} \left[ 3T - \frac{A}{T} \frac{dT}{dy} \right] \quad [۸]$$

$$N = \frac{2y}{3A} \left[ 5T - 2R \frac{dP}{dy} \right] \quad [۹]$$

که در این معادله  $y$  عمق جریان،  $A$  مساحت مقطع جریان،  $T$  عرض سطح آزاد آب،  $R$  شعاع هیدرولیکی و  $P$  محیط مرطوب کانال هستند. برای تسهیل حل معادله-ی [۷]، دو متغیر  $y$  و  $x$  را می توان بی بعد نمود. این کار به دو طریق انجام می شود: (الف) به کمک عمق نرمال  $(y_n - y_c)$  (ب) به کمک عمق بحرانی  $(y_n - y_c)$  تفکیک به دو حالت، عدم توانایی معادله های حالت  $-y_n$  مبنا برای تحلیل شیب های معکوس و افقی است که در این دو وضعیت عمق نرمال تعریف نشده یا بی نهایت است. در ادامه به تشریح هر دو حالت پرداخته شده است.

**بی بعدسازی معادله ی جریان متغیر تدریجی به کمک عمق نرمال**

به منظور بی بعد کردن معادله ی [۷] با استفاده از عمق  $y_n$ ، دو متغیر بی بعد  $u$  و  $x_*$  و نیز پارامتر بی بعد  $\lambda$  به فرم زیر تعریف می شوند:

$$u = \frac{y}{y_n} \quad [۱۰]$$

$$x_* = \frac{x S_0^*}{y_n} \quad [۱۱]$$

$$\lambda = \frac{y_c}{y_n} \quad [۱۲]$$

با جاگذاری معادله های [۱۰] تا [۱۲] در معادله ی [۷]

می توان نوشت:

$$\frac{du}{dx_*} = \frac{u^{N-1}}{u^N - \lambda^M u^{N-M}} \quad [۱۳]$$

**حل تحلیلی معادله ی جریان متغیر تدریجی  $-y_n$  مبنا**

$$x_{\#} = \frac{v^{N+M+1}}{N-M+1} + \frac{\lambda^{N+1} v^{2N-M+1}}{2N-M+1} g\left(\frac{2N-M+1}{N}, (\lambda v)^N\right) - \frac{v^{N+1}}{N+1} g\left(\frac{N+1}{N}, (\lambda v)^N\right) + C \quad [27]$$

$$x_{\#} = \frac{v^{N+M+1}}{N-M+1} - \frac{\lambda^{N+1} v^{2N-M+1}}{2N-M+1} g\left(\frac{2N-M+1}{N}, -(\lambda v)^N\right) - \frac{v^{N+1}}{N+1} g\left(\frac{N+1}{N}, -(\lambda v)^N\right) + C. \quad [28]$$

دومین حالت وقوع رابطه  $|\lambda v| > 1$  می باشد. در این حالت شرط همگرایی برقرار نیست ولی می توان با تغییر متغیر به قرار زیر در جهت رفع عدم همگرایی برآمد:

$$v = w^{-1} \rightarrow dv = -w^{-2} dw \quad [29]$$

حال با استفاده از معادله‌ی [۲۹] معادله‌های [۲۳] و

[۲۴] که به ترتیب مربوط به شیب‌های غیرمعکوس و معکوس هستند به فرم زیر تبدیل خواهند شد:

$$\frac{dx_{\#}}{dw} = \frac{\lambda^{-N} (-w^{-2} + w^{M-2})}{1 - (\frac{w}{\lambda})^N} = -\lambda^{-N} w^{-2} - \frac{\lambda^{-2N} w^{M-2}}{1 - (\frac{w}{\lambda})^N} + \frac{\lambda^{-N} w^{M-2}}{1 - (\frac{w}{\lambda})^N} \quad [30]$$

$$\frac{dx_{\#}}{dw} = \frac{\lambda^{-N} (w^{-2} - w^{M-2})}{1 + (\frac{w}{\lambda})^N} = \lambda^{-N} w^{-2} - \frac{\lambda^{-2N} w^{M-2}}{1 + (\frac{w}{\lambda})^N} - \frac{\lambda^{-N} w^{M-2}}{1 + (\frac{w}{\lambda})^N} \quad [31]$$

حل تحلیلی معادله‌های [۳۰] و [۳۱] به ترتیب در

معادله‌های [۳۲] و [۳۳] نشان داده شده است:

$$x_{\#} = \lambda^{-N} w^{-1} - \lambda^{-2N} \int_0^w \frac{w^{N-2}}{1 - (\frac{w}{\lambda})^N} dw + \lambda^{-N} \int_0^w \frac{w^{N-2}}{1 - (\frac{w}{\lambda})^N} dw + C. \quad [32]$$

$$x_{\#} = -\lambda^{-N} w^{-1} - \lambda^{-2N} \int_0^w \frac{w^{N-2}}{1 + (\frac{w}{\lambda})^N} dw - \lambda^{-N} \int_0^w \frac{w^{N-2}}{1 + (\frac{w}{\lambda})^N} dw + C. \quad [33]$$

با استفاده از تابع فوق هندسی گوس حل معادله‌های

[۳۲] و [۳۳] به ترتیب به قرار معادله‌های [۳۴] و [۳۵]

خواهند بود:

$$x_{\#} = \lambda^{-N} w^{-1} - \frac{\lambda^{-2N} w^{N-1}}{N-1} g\left(\frac{N-1}{N}, \left(\frac{w}{\lambda}\right)^N\right) + \frac{\lambda^{-N} w^{M-1}}{M-1} g\left(\frac{M-1}{N}, \left(\frac{w}{\lambda}\right)^N\right) + C \quad [34]$$

$$x_{\#} = -\lambda^{-N} w^{-1} - \frac{\lambda^{-2N} w^{N-1}}{N-1} g\left(\frac{N-1}{N}, -\left(\frac{w}{\lambda}\right)^N\right) - \frac{\lambda^{-N} w^{M-1}}{M-1} g\left(\frac{M-1}{N}, -\left(\frac{w}{\lambda}\right)^N\right) + C. \quad [35]$$

حال اگر با استفاده از معادله‌ی [۲۹] متغیر  $v$

جایگزین متغیر  $w$  در معادله‌های [۳۴] و [۳۵] شود حل

تحلیلی شیب‌های افقی و معکوس بر مبنای تابع فوق-

هندسی گوس  $y_c - y_c$  مینا به قرار زیر به دست خواهند آمد:

$$x_{\#} = \lambda^{-N} v - \frac{\lambda^{-2N} v^{1-N}}{N-1} g\left(\frac{N-1}{N}, (\lambda v)^N\right) + \frac{\lambda^{-N} v^{1-M}}{M-1} g\left(\frac{M-1}{N}, (\lambda v)^N\right) + C \quad [36]$$

$$x_{\#} = -\lambda^{-N} v - \frac{\lambda^{-2N} v^{1-N}}{N-1} g\left(\frac{N-1}{N}, -(\lambda v)^N\right) - \frac{\lambda^{-N} v^{1-M}}{M-1} g\left(\frac{M-1}{N}, -(\lambda v)^N\right) + C. \quad [37]$$

## نتایج و بحث

در جدول ۲ حل تحلیلی پروفیل‌های هشت‌گانه با

استفاده از معادله‌های [۱۸] و [۲۰] ارائه شده است. لازم

به ذکر است مقدار ثابت انتگرالی با استفاده از شرایط

مرزی داده شده در مسئله تعیین خواهد شد. در جدول

## جدول ۱- تقسیم‌بندی شیب کانال براساس پارامتر $\lambda$ .

ردیف	مقدار پارامتر $\lambda$	نوع شیب
۱	$\lambda < 1$	ملازم، M
۲	$\lambda = 1$	بحرانی، C
۳	$\lambda > 1$	تند، S
۴	$\lambda = 0$	افقی، H
۵	موهومی	معکوس، A

بی‌بعدسازی معادله‌ی جریان متغیر تدریجی به کمک

عمق بحرانی

در این روش از عمق بحرانی،  $y_c$ ، برای بی‌بعد کردن

معادله‌ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی، معادله‌ی [۷]،

استفاده می‌شود. دو متغیر  $v$  و  $x_{\#}$  به فرم زیر تعریف

می‌شوند:

$$v = \frac{y}{y_c} \quad [21]$$

$$x_{\#} = x \frac{S_c^*}{y_c} \quad [22]$$

با جاگذاری معادله‌های [۲۱] و [۲۲] در معادله‌ی [۷]

رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dv}{dx_{\#}} = \frac{1 - \lambda^N v^N}{v^{N-M} (1 - v^M)} \quad [23]$$

لازم به ذکر است در کانال با شیب معکوس معادله‌ی

[۲۳] به فرم زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{dv}{dx_{\#}} = \frac{1 + \lambda^N v^N}{v^{N-M} (1 - v^M)} \quad [24]$$

## حل تحلیلی معادله‌ی جریان متغیر تدریجی $y_c - y_c$ مینا

همانند بخش قبلی، دو حالت در حل تحلیلی معادله-

های [۲۳] و [۲۴] پیش خواهد داد. اولین حالت وقوع

وضعیت  $|\lambda v| < 1$  است که شرط همگرایی سری معادله‌ی

[۴] در وضعیت بی‌بعدسازی  $y_c - y_c$  مینا می‌باشد. در این

حالت معادله‌های [۲۳] و [۲۴] به ترتیب برای شیب‌های

غیرمعکوس و معکوس منجر به رابطه‌های [۲۵] و [۲۶]

خواهند شد:

$$x_{\#} = \frac{v^{N-M+1}}{N-M+1} + \lambda^N \int_0^v \frac{v^{2N-M}}{1 - (\lambda v)^N} dv - \int_0^v \frac{v^N}{1 - (\lambda v)^N} dv + C. \quad [25]$$

$$x_{\#} = \frac{v^{N-M+1}}{N-M+1} - \lambda^N \int_0^v \frac{v^{2N-M}}{1 + (\lambda v)^N} dv - \int_0^v \frac{v^N}{1 + (\lambda v)^N} dv + C. \quad [26]$$

معادله‌های [۲۷] و [۲۸] به ترتیب بیانگر حل تحلیلی

معادله‌های [۲۵] و [۲۶] به قرار زیر هستند:

مقدار  $M$  و  $N$  هستند که مقدار این دو پارامتر در کانال-های مستطیلی و مثلثی با استفاده از معادله‌های [۷] و [۸] به ترتیب برابر با  $(M=3.0, N=\frac{10}{3}-\frac{8}{3}\frac{y}{1+2\frac{y}{b}})$  و  $(M=5.0, N=\frac{16}{3})$  هستند.

۳ حل تحلیلی پروفیل‌های دوازده‌گانه جریان‌های متغیر تدریجی براساس حل از طریق تابع فوق هندسی گوس ارائه شده است. در این پژوهش، از معادله‌ی مانینگ به عنوان معادله‌ی مقاومت جریان استفاده شده است. معادله‌های ارائه شده در جدول‌های ۲ و ۳ تابعی از

جدول ۲- حل تحلیلی معادله‌ی جریان متغیر تدریجی با استفاده از تابع فوق هندسی گوس  $y_n$ -مبنا.

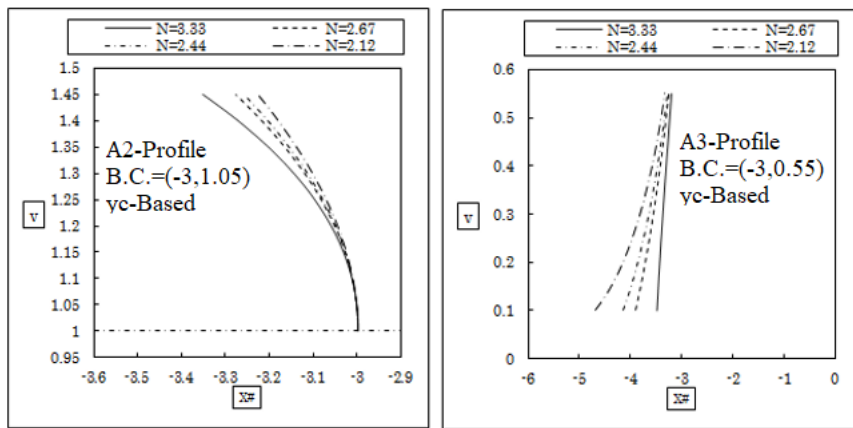
شماره‌ی معادله	حل تحلیلی پروفیل	مشخصات	نام پروفیل	ردیف
[۳۸]	$x_* = u \left[ 1 - \frac{u^{-N}}{N-1} g \left( \frac{N-1}{N}, u^{-N} \right) \right] + \frac{\lambda^M u^{-M+1}}{M-1} g \left( \frac{M-1}{N}, u^{-N} \right) + \text{Const.}$	$1 < u < \infty$ $\lambda \leq u < \infty$ $1 < u < \lambda$	M1 S1 S2	۱
[۳۹]	$x_* = u \left[ 1 - g \left( \frac{1}{N}, u^N \right) \right] + \frac{\lambda^M u^{N-M+1}}{N-M+1} g \left( \frac{N-M+1}{N}, u^N \right) + \text{Const.}$	$\lambda \leq u < 1$ $0 \leq u < \lambda$ $0 \leq u < 1$	M2 M3 S3	۲
[۴۰]	$x_* = u \left[ 1 - \frac{u^{-N}}{N-1} g \left( \frac{N-1}{N}, u^{-N} \right) \right] + \frac{u^{-M+1}}{M-1} g \left( \frac{M-1}{N}, u^{-N} \right) + \text{Const.}$	$1 < u < \infty$	C1	۳
[۴۱]	$x_* = u \left[ 1 - g \left( \frac{1}{N}, u^N \right) \right] + \frac{u^{N-M+1}}{N-M+1} g \left( \frac{N-M+1}{N}, u^N \right) + \text{Const.}$	$0 \leq u < 1$	C3	۴

جدول ۳- حل تحلیلی معادله‌ی جریان متغیر تدریجی با استفاده از تابع فوق هندسی گوس  $y_c$ -مبنا.

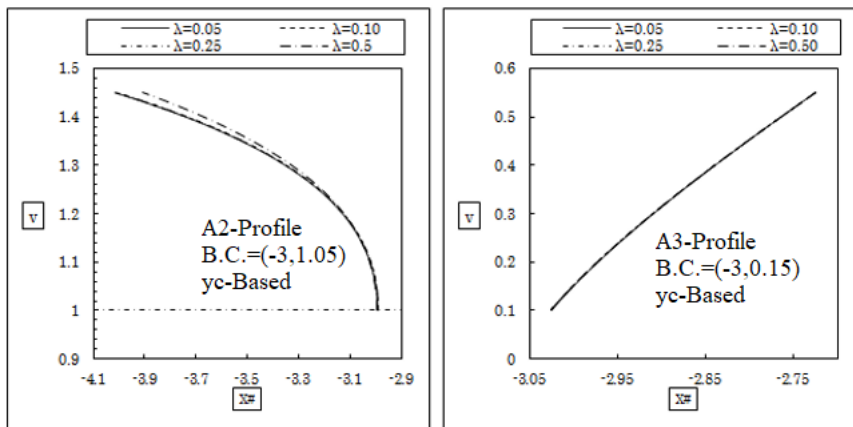
شماره معادله	حل تحلیلی پروفیل	مشخصات	نام پروفیل	ردیف
[۴۲]	$x_{\#} = \frac{v^{N-M+1}}{N-M+1} - \frac{v^{N+1}}{N+1} + \text{Const.}$	$1 \leq v < \infty$ $0 \leq v < 1$	H2 H3	۱
[۴۳]	$x_{\#} = \lambda^{-N} v g(-N^{-1}, (\lambda v)^{-N}) + \frac{\lambda^{-N} v^{1-M}}{M-1} g \left( \frac{M-1}{N}, (\lambda v)^{-N} \right) + \text{Const.}$	$\lambda^{-1} < v < \infty$ $1 \leq v < \infty$ $\lambda^{-1} < v \leq 1$	M1 S1 S2	۲
[۴۴]	$x_{\#} = \frac{v^{N-M+1}}{N-M+1} g \left( \frac{N-M+1}{N}, (\lambda v)^N \right) - \frac{v^{N+1}}{N+1} g \left( \frac{N+1}{N}, (\lambda v)^N \right) + \text{Const.}$	$1 \leq v < \lambda^{-1}$ $0 \leq v \leq 1$ $0 \leq v < \lambda^{-1}$	M2 M3 S3	۳
[۴۵]	$x_{\#} = v g \left( \frac{-1}{N}, v^{-N} \right) - \frac{v^{1-M}}{M-1} g \left( \frac{M-1}{N}, v^{-N} \right) + \text{Const.}$	$1 < v < \infty$ $= 1\lambda$	C1	۴
[۴۶]	$x_{\#} = \frac{v^{N-M+1}}{N-M+1} g \left( \frac{N-M+1}{N}, v^N \right) - \frac{v^{N+1}}{N+1} g \left( \frac{N+1}{N}, v^N \right) + \text{Const.}$	$0 \leq v < 1$ $= 1\lambda$	C3	۵
[۴۷]	$x_{\#} = \frac{v^{N-M+1}}{N-M+1} g \left( \frac{N-M+1}{N}, -(\lambda v)^N \right) - \frac{v^{N+1}}{N+1} g \left( \frac{N+1}{N}, -(\lambda v)^N \right) + \text{Const.}$	$1 \leq v < \infty$ $0 \leq v \leq \infty$	A2 A3	۶

است. باید توجه داشت این نمودارها برحسب شرایط مرزی که در داخل هر نمودار نوشته شده است ترسیم شده‌اند. طبق مطالب بخش‌های قبلی، پروفیل‌های نوع C، H و A فقط حل  $y_c$ -مبنا دارند زیرا در این نوع شیب‌ها، عمق نرمال تعریف نشده است.

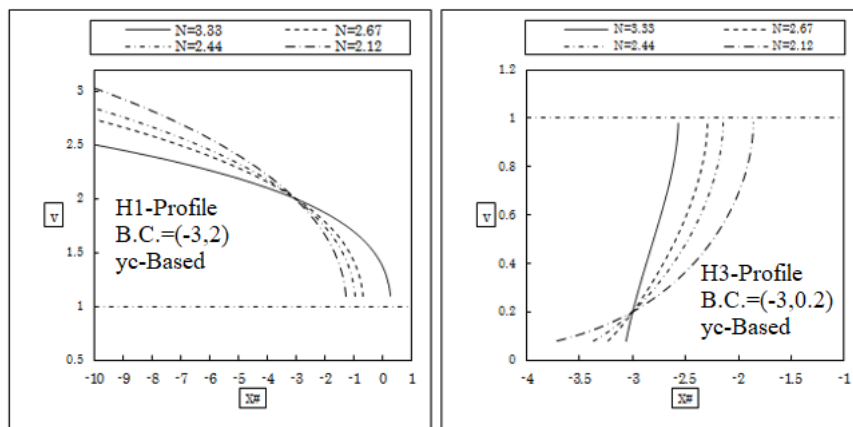
رسم منحنی تغییرات  $u-x_*$  و  $v-x_{\#}$  به ترتیب با استفاده از معادله‌های [۲۱] تا [۲۴] و معادله‌های [۴۲] تا [۴۷] می‌تواند بیانگر حل تحلیلی معادله‌ی جریان متغیر تدریجی برای شرایط خاص مرزی باشد. در شکل‌های ۱ تا ۱۰ حل تحلیلی پروفیل‌های  $M$ ،  $S$ ،  $C$ ،  $A$  و  $H$  برای دو مقطع عرضی مستطیلی و مثلثی نشان داده شده



شکل ۱- ترسیم منحنی بی بعد  $x\#-v$  برای پروفیل نوع A در کانال مستطیلی.

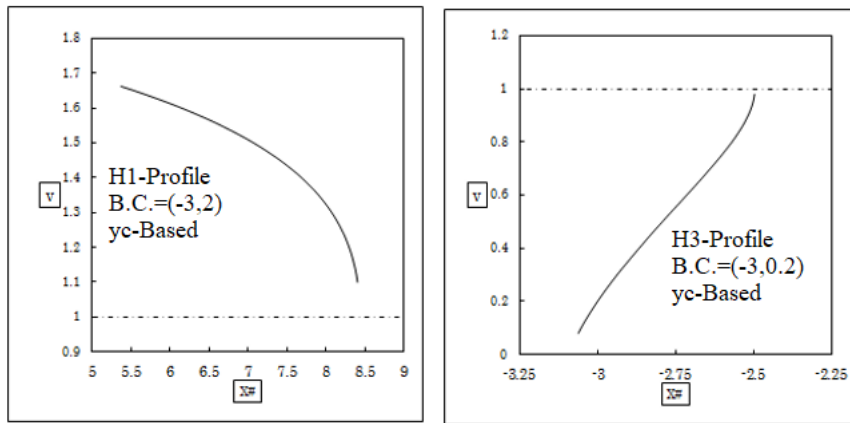


شکل ۲- ترسیم منحنی بی بعد  $x\#-v$  برای پروفیل نوع A در کانال مثلثی.

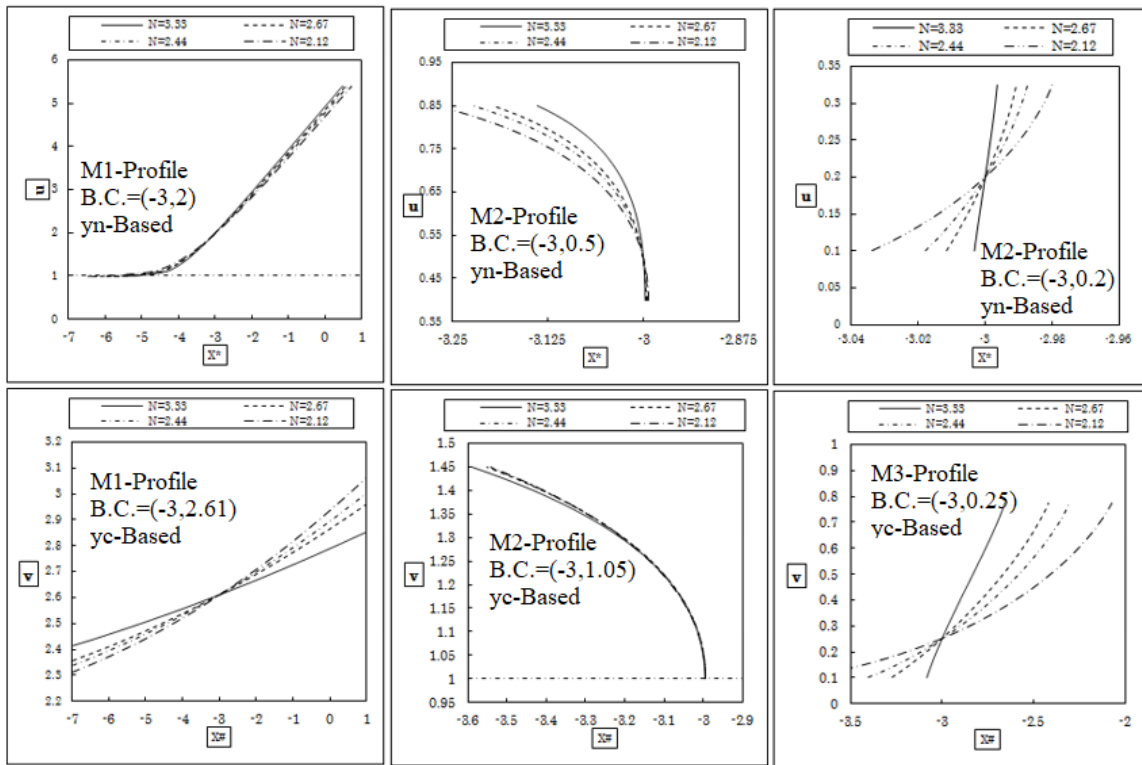


شکل ۳- ترسیم منحنی بی بعد  $x\#-v$  برای پروفیل نوع H در کانال مستطیلی.

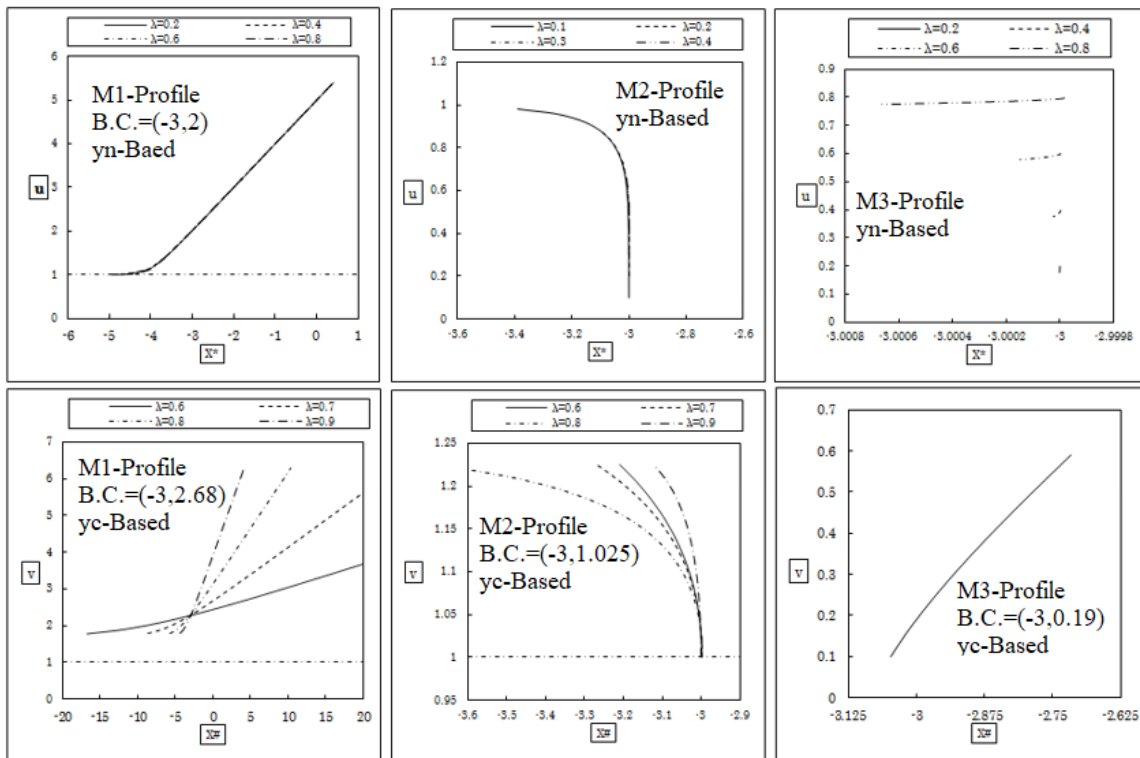




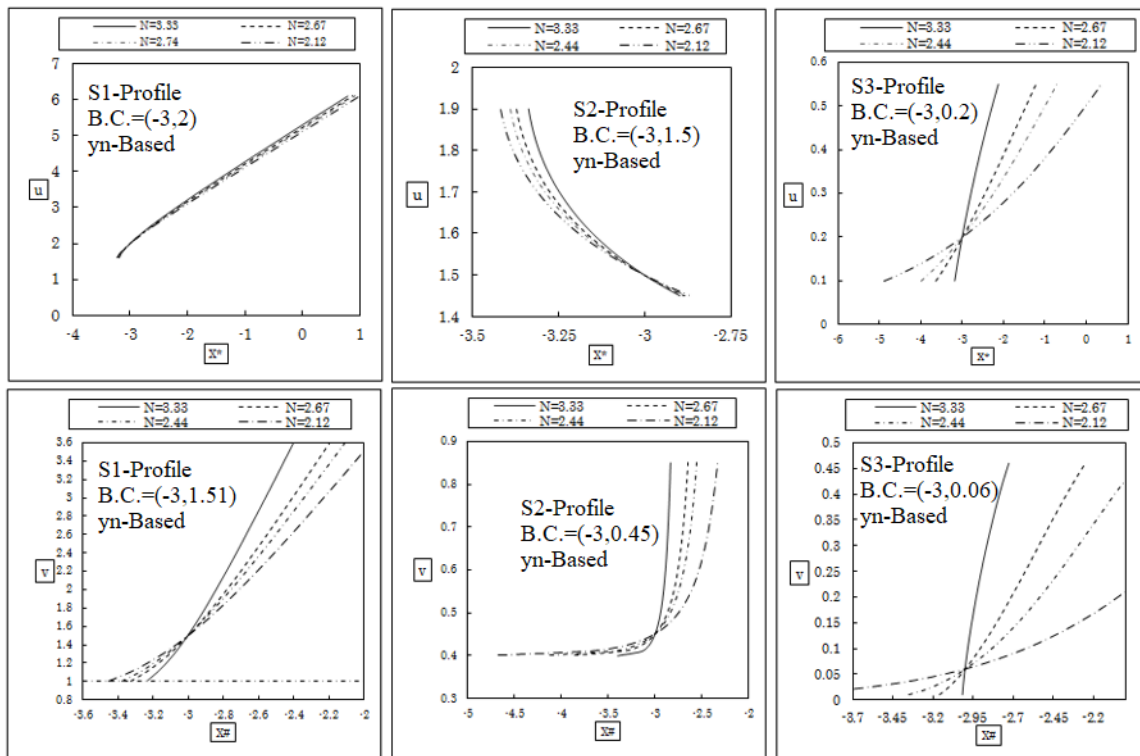
شکل ۴- ترسیم منحنی بی بعد  $X^*-v$  برای پروفیل نوع H در کانال مثلثی.



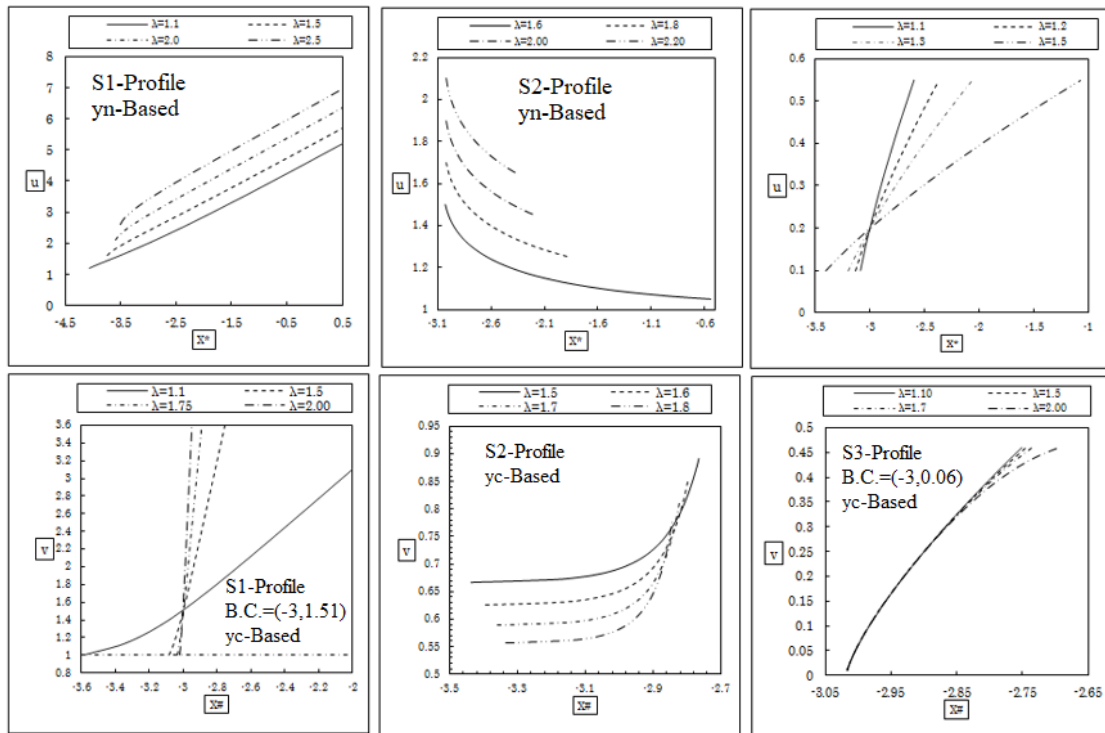
شکل ۵- ترسیم منحنی بی بعد  $X^*-v$  و  $X^*-u$  برای پروفیل نوع M در کانال مستطیلی.



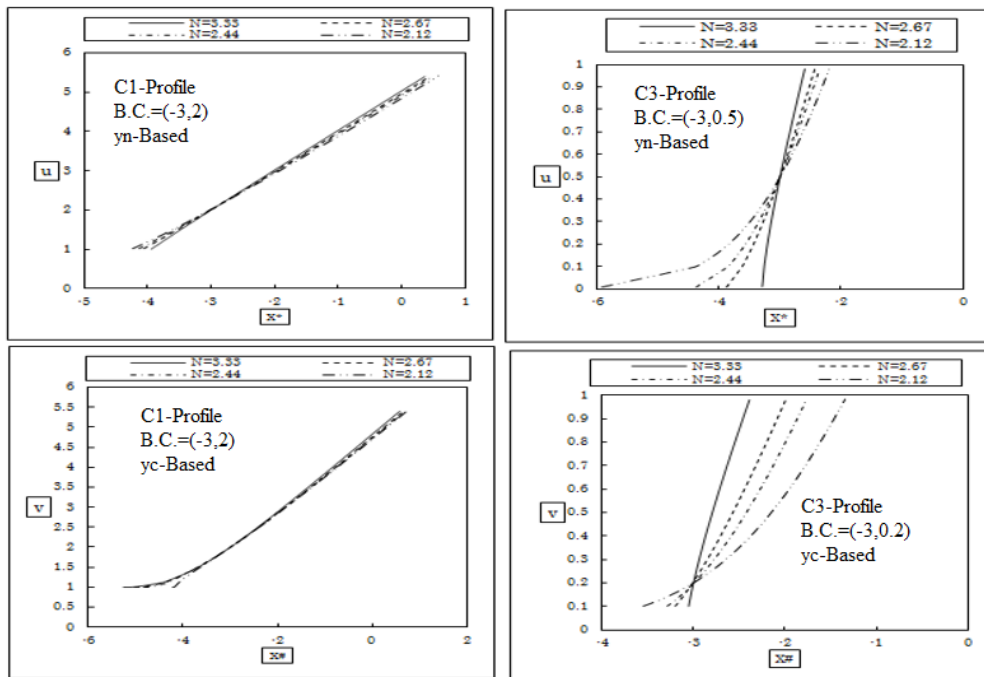
شکل ۶- ترسیم منحنی بی بعد  $X^*-u$  و  $X^*-v$  برای پروفیل نوع M در کانال مثلثی.



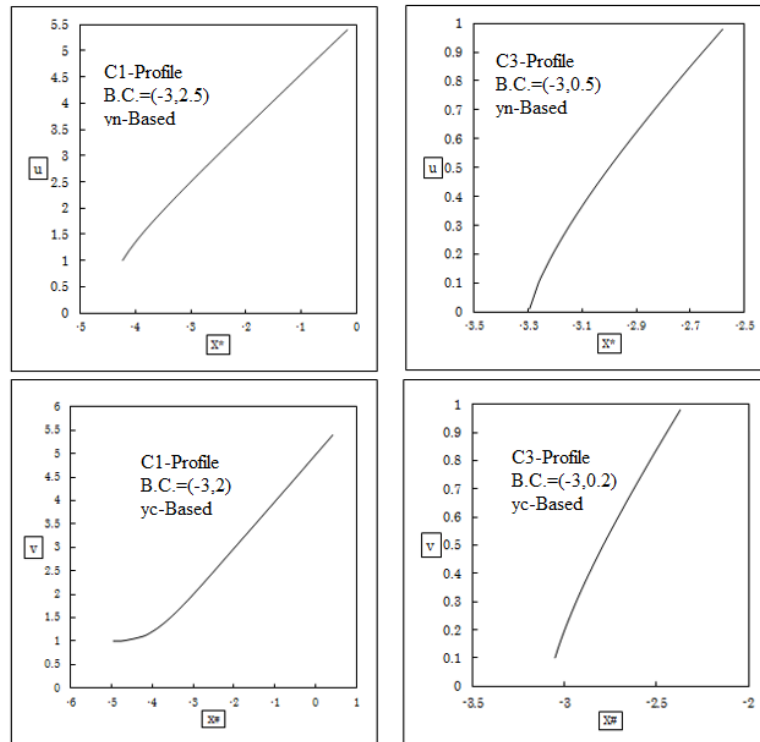
شکل ۷- ترسیم منحنی بی بعد  $X^*-u$  و  $X^*-v$  برای پروفیل نوع S در کانال مستطیلی.



شکل ۸- ترسیم منحنی بی بعد  $x^*-u$  و  $x^*-v$  برای پروفیل نوع S در کانال مثلثی.



شکل ۹- ترسیم منحنی بی بعد  $x^*-u$  و  $x^*-v$  برای پروفیل نوع C در کانال مستطیلی.



شکل ۱۰- ترسیم منحنی بی بعد  $x^*-u$  و  $x^*-v$  برای پروفیل نوع C در کانال مثلثی.

گردید. در جدول ۴ مقایسه‌ی بین مقادیرهای مشاهده‌ای و محاسبه‌ای شاخص‌های ارزیابی برای حل‌گر تحلیلی و حل‌گر عددی رونگ‌کوتای مرتبه‌ی چهار ارائه شده است. در این جدول RMSE مجموع مربعات مجذور خطا،  $R^2$  ضریب همبستگی بین مقادیرهای مشاهده‌ای و محاسبه‌ای و E قدر مطلق متوسط درصد خطا هستند که از معادله‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_{oi} - x_{pi})^2}{N}} \quad [50]$$

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{oi} - \bar{x}_o)(x_{pi} - \bar{x}_p)}{\sqrt{[\sum_{i=1}^N (x_{oi} - \bar{x}_o)^2][\sum_{i=1}^N (x_{pi} - \bar{x}_p)^2]}} \quad [51]$$

$$E(\%) = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{x_{oi} - x_{pi}}{x_{oi}} \right| \quad [52]$$

که در این معادله‌ها N تعداد کل داده‌ها،  $x_o$  و  $x_p$  به ترتیب داده‌های مشاهده‌ای و محاسبه‌ای،  $\bar{x}_o$  و  $\bar{x}_p$  به ترتیب مقادیرهای میانگین داده‌های مشاهده‌ای و محاسبه‌ای هستند. با توجه به اینکه شیب کانال آزمایشگاهی معکوس یا افقی نیست بنابراین نتیجه‌های تحلیلی به دست آمده از معادله‌های [۳۸] و [۴۳] با یکدیگر برابر خواهند بود. مقدار شاخص‌های RMSE و  $R^2$  برای پروفیل‌های M1، S2 و C3 به ترتیب (۰/۰۱۷۳،

نکته‌ی مهم اینکه اگرچه حل معادله‌ی جریان متغیر تدریجی در دو حالت  $y_n$ -مبنا و  $y_c$ -مبنا مورد بررسی قرار گرفت اما با استفاده از معادله‌های [۱۰] و [۱۱] و همچنین [۲۵] و [۲۶] می‌توان به نتایج زیر دست یافت:

$$\frac{u}{v} = \frac{y_c}{y_n} \quad [48]$$

$$\frac{x^*}{x_{\#}} = \left( \frac{y_c}{y_n} \right)^{N+1} = (\lambda)^{N+1} \quad [49]$$

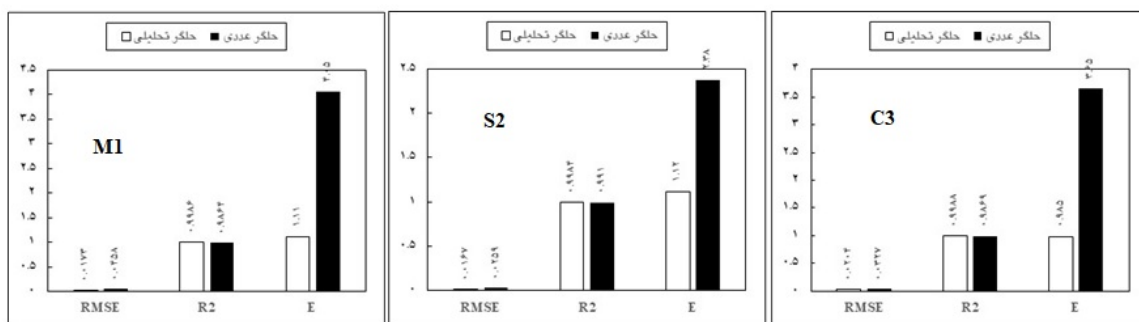
معادله‌های [۴۸] و [۴۹] در واقع مبدل راه‌حل‌های  $y_n$ -مبنا و  $y_c$ -مبنا به یکدیگر هستند. به منظور ارزیابی معادله‌ها در تحلیل پروفیل GVF، در آزمایشگاه هیدرولیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد رامهرمز به کمک فلوم آزمایشگاهی، جریان متغیر تدریجی ایجاد گردید. این آزمایش روی فلومی با مقطع عرضی مستطیلی با ضریب زبری ۰/۰۱۱، عرض ۱۰ سانتیمتر و طول ۷ متر با ایجاد پروفیل‌های نوع M1، S2 و C3 از طریق تنظیم شیب طولی و تعبیه سرریز در مسیر جریان انجام گرفت. در هر آزمایش عمق جریان با استفاده از سطح-سنج اندازه‌گیری شد و سپس با استفاده از معادله‌های ارائه شده برای هر پروفیل در جدول‌های ۲ و ۳ محاسبه

عددی تایید می‌کند به طوری که مقدار E برای پروفیل M1 در حل گر تحلیلی و عددی به ترتیب ۱/۱۱ و ۴/۰۵ درصد، برای پروفیل S2 به ترتیب ۱/۱۲ و ۲/۳۸ درصد و برای پروفیل C3 به ترتیب ۰/۹۸۵ و ۳/۶۵ درصد هستند. در شکل ۱۱ بیان گرافیکی از شاخص‌های ارزیابی عملکرد حل‌گرهای تحلیلی و عددی برای هر یک سه پروفیل ارائه شده در جدول ۴ ارائه شده است.

(۰/۹۹۸۶، ۰/۰۱۶۷)، (۰/۹۹۸۴، ۰/۰۲۰۴) و (۰/۹۹۸۸، ۰/۰۲۰۴) به دست آمده‌اند در حالیکه مقدار منتظر آنها برای حل گر عددی به ترتیب (۰/۹۸۶۴، ۰/۰۴۵۸)، (۰/۹۹۹۱، ۰/۰۲۵۹) و (۰/۹۸۶۹، ۰/۰۳۲۷) هستند. مقدار این دو شاخص نشان دهنده ی برتری حل گر عددی فوق‌هندسی گوس نسبت به روش رونگ‌کوتای مرتبه‌ی چهار است. مقایسه‌ی مقدار شاخص E نیز برتری حل گر تحلیلی را نسبت به حل گر

جدول ۴- مقایسه‌ی نتیجه‌های حل‌گرهای تحلیلی و عددی پروفیل‌های GVF در کانال مستطیلی.

پروفیل M1												
E		حل گر تحلیلی						$\lambda$	$S_0$	$y_c$ (m)	$y_n$ (m)	$Q$ ( $m^3 s^{-1}$ )
حل گر عددی	حل گر تحلیلی	حل گر عددی		معادله‌ی شماره‌ی [۳۳]		معادله‌ی شماره‌ی [۳۸]						
		$R^2$	RMSE	$R^2$	RMSE	$R^2$	RMSE					
۴/۰۵	۱/۱۱	۰/۹۸۶۴	۰/۰۴۵۸	۰/۹۹۸۶	۰/۰۱۷۳	۰/۹۹۸۶	۰/۰۱۷۳	۰/۶	۰/۰۰۴	۰/۱۰۱	۰/۱۵۴	۰/۰۱
پروفیل S2												
E		حل گر تحلیلی						$\lambda$	$S_0$	$y_c$ (m)	$y_n$ (m)	$Q$ ( $m^3 s^{-1}$ )
حل گر عددی	حل گر تحلیلی	حل گر عددی		معادله‌ی شماره‌ی [۳۳]		معادله‌ی شماره‌ی [۳۸]						
		$R^2$	RMSE	$R^2$	RMSE	$R^2$	RMSE					
۲/۳۸	۱/۱۲	۰/۹۹۹۱	۰/۰۲۵۹	۰/۹۹۸۴	۰/۰۱۶۷	۰/۹۹۸۴	۰/۰۱۶۷	۱/۶	۰/۰۴	۰/۱۰۱	۰/۰۶۱	۰/۰۱
پروفیل C3												
E		حل گر تحلیلی						$\lambda$	$S_0$	$y_c$ (m)	$y_n$ (m)	$Q$ ( $m^3 s^{-1}$ )
حل گر عددی	حل گر تحلیلی	حل گر عددی		معادله‌ی شماره‌ی [۳۳]		معادله‌ی شماره‌ی [۳۸]						
		$R^2$	RMSE	$R^2$	RMSE	$R^2$	RMSE					
۳/۶۵	۰/۹۸۵	۰/۹۸۶۹	۰/۰۳۲۷	۰/۹۹۸۸	۰/۰۲۰۴	۰/۹۹۸۸	۰/۰۲۰۴	۱/۰	۰/۰۱۱	۰/۱۰۱	۰/۱۰۱	۰/۰۱



شکل ۳- مقایسه‌ی شاخص‌های ارزیابی عملکرد  $R^2$ ، RMSE و E حل‌گرهای تحلیلی و عددی برای پروفیل‌های GVF.

محاسبه‌ی دقیق پروفیل‌های GVF جایگاه بسیار ویژه‌ای خواهد داشت. در این راستا استفاده از روش‌های حل عددی منجر به خطاهای محاسباتی می‌شود که مقدار این خطاها ناشی از فرضیه‌ها و نیز ماهیت تقریبی راه-حل‌های عددی است. در این پژوهش، به کمک تابع فوق-

## نتیجه‌گیری کلی

وقوع پروفیل‌های جریان متغیر تدریجی به دلیل وجود سازه‌های هیدرولیکی و یا تغییرات مشخصات هندسی و فیزیکی مجرا از جمله پدیده‌های متداول در کانال‌ها و آبراهه‌های طبیعی است که پیش‌بینی و

است. درصد خطای محاسبه‌ای برای روش‌های حل عددی و حل تحلیلی در جدول ۴ موید این مطلب است.

### تقدیر و تشکر

این مقاله مستخرج از طرح پژوهشی داخلی با عنوان «حل تحلیلی معادله‌ی دینامیکی جریان متغیر تدریجی با استفاده از تابع فوق‌هندسی گوس» می‌باشد که بدین وسیله نویسندگان مقاله از دانشگاه آزاد اسلامی واحد رامهرمز بابت تامین کلیه‌ی هزینه‌های طرح، تقدیر و تشکر می‌نمایند.

هندسی گوس روش تحلیلی برای حل پروفیل GVF ارائه شده است. این روش مبتنی بر بی‌بعد کردن معادله دینامیکی جریان GVF به کمک عمق بحرانی و عمق نرمال استوار است که منجر به دو گروه راه حل  $y_c$ -مینا و  $y_n$ -مینا شده است. مقایسه‌ی سه پروفیل زیربحرانی، بحرانی و فوق‌بحرانی مشاهده‌ای با دو روش حل تحلیلی و عددی بر مبنای سه سنجه‌ی ارزیابی مجذور میانگین مربعات خطا، ضریب تبیین و میانگین درصد خطا ضمن تایید معادله‌های به دست آمده از حل تحلیلی در این پژوهش نشان داد دقت حل روش تحلیلی منتج از تابع فوق هندسی گوس بیشتر از دقت روش عددی

### منابع مورد استفاده

- Bakhmeteff BA, 1932. *Hydraulics of Open Channels*. McGraw-Hill, New York, N.Y.
- Bresse J, 1860. *Cours de Mécanique Appliqué*, 2e partie edition. Hydraulique. Mallet-Bachelier, Paris.
- Chen CL and Wang CT, 1969. Non-dimensional gradually varied flow profiles. *Journal of Hydraulic Division* 95: 1671-1686.
- Chow VT, 1959. *Open-Channel Hydraulics*. McGraw-Hill, New York, N.Y.
- Chow VT, 1957. Closure of Discussions on integrating the equation of gradually varied flow. *Journal of Hydraulic Division* 83: 9-22.
- Chow VT. 1955. Integrating the equation of gradually varied flow. *American Society of Civil Engineering*, 81(11): 1-32.
- Hayek M, 2016. Analytical solution to transient Richards' equation with realistic water profiles for vertical infiltration and parameter estimation. *Water Resources Research* 52(6): 4438-4457.
- Henderson FM, 1969. *Open Channel Flow*. McMillan Publication Co., N.Y.
- Jan CD and Chen CL, 2012. Use of the Gaussian hyper-geometric function to solve the equation of gradually-varied flow. *Journal of Hydrology* 457: 139-145.
- Jan CD and Chen CL, 2013. Gradually varied open-channel flow profiles normalized by critical depth and analytically solved by using Gaussian hyper-geometric. *Hydrology and Earth System Science* 17: 173-987.
- Kumar A, 1979. Gradually varied surface profiles in horizontal and adversely sloping channels. *Institute of Civil Engineers* 67: 435-452.
- Kumar A, 1978. Integral solutions of the gradually varied equation for regular and triangular channels. *Institute of Civil Engineers* 65: 509-515.
- Olde Daalhuis AB, 2010. Hypergeometric function. In: *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Pp. 383-401. Cambridge University Press, Cambridge.
- Subramanya K, 2009. *Flow in Open Channels* (3<sup>rd</sup> Edition). McGraw-Hill, Singapore.
- Vatankhah AR, 2015. Analytical solution of gradually varied flow equation in circular channels using variable manning coefficient. *Flow Measurement and Instrumentation* 43: 53-58.
- Venutelli M, 2004. Direct integration of the equation of gradually varied flow. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* 130: 88-91.
- Wolfram S, 1996. *The Mathematica Book* (Third edition). Wolfram Media & Cambridge University Press, Champaign, Illinois.