

## بررسی تاثیر جذب یونی بر انتقال جرم در محیط های متخلخل اشباع

شهرام شاه محمدی کالاق<sup>۱\*</sup> و امیرحسین ناظمی<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۸۷/۱۰/۲۷ تاریخ پذیرش: ۸۸/۲/۳۰

۱- دانشجوی دکتری آبیاری و زهکشی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران

۲- دانشیار، گروه مهندسی آب، دانشگاه تبریز

\*مسئول مکاتبه: E-mail [shahmohammadi\\_sh@yahoo.com](mailto:shahmohammadi_sh@yahoo.com)

### چکیده

استفاده از مدل های ریاضی به عنوان ابزاری کارآمد در مطالعات و مدیریت انتقال جرم در محیط های متخلخل رایج می باشد. مدل حاضر با بهره گیری از رابطه ی حاکم بر انتقال دو بعدی جرم در محیط متخلخل، تاثیر جذب یونی را بر انتقال و توزیع دوبعدی جرم در یک محیط متخلخل اشباع و نیمه نامتناهی بیان می کند. این مدل با دو نوع شرط مرزی نوع اول (شرط دیریکله) و نوع سوم (شرط کوشی) بصورت تحلیلی حل شده است. درانتقال جرم به صورت انتشار، شرط مرزی نوع سوم غلظت جرم را در مرز یا سطح خاک بیشتر از شرط مرزی نوع اول نشان می دهد و در انتقال جرم به صورت انتقال توده ای - پخش، منحنی های توزیع غلظت جرم حاصل از شرایط مرزی نوع اول و نوع سوم به دلیل غالب بودن انتقال توده ای تقریباً یکسان می باشد. تاثیر جذب یونی بر روی ذرات جامد محیط به وسیله عامل تاخیر در مدل ارزیابی شده است. عامل تاخیر بزرگتر از واحد، باعث تاخیر در انتقال، توزیع و پخش جرم در محیط متخلخل می شود. تاثیر جذب یونی بر توزیع غلظت جرم مستقل از نوع شرط مرزی و وابسته به حالت های انتقال و پخش جرم در محیط متخلخل می باشد به طوری که میزان این تاثیر در انتقال جرم بصورت انتقال توده ای - پخش در مقایسه با حالت انتشار به مراتب بیشتر می باشد.

واژه های کلیدی: انتقال توده ای-پخش، جذب یونی، شرط دیریکله، شرط کوشی، عامل تاخیر، محیط متخلخل

## Effect of Ion Adsorption on Solute Transport in Saturated Porous Media

Sh Shahmohammadi Kalalagh<sup>1\*</sup> and AH Nazemi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>PhD Student, Dept. of Water and Engin., Islamic Azad Univ. Science and Research branch Tehran, Iran

<sup>2</sup>Assoc. Prof. Dept. of Water Engin, Univ. of Tabriz, , Iran

\* Corresponding author :E-mail: [shahmohammadi\\_sh@yahoo.com](mailto:shahmohammadi_sh@yahoo.com)

### Abstract

Use of mathematical models as efficient tools in solute transport studies and management in porous media is usual. The present model by making use of the governing equation for two - dimensional solute transport in a porous medium expresses the ion adsorption effect on solute transport in a saturated semi infinite porous medium. This model has been solved analytically under the first type (Dirichlet condition) and the third type (Cauchy condition) boundary conditions. In solute transport by diffusion, the third type boundary condition shows the solute concentration at the boundary or on the soil surface more than that of the first boundary condition. In advection – dispersion solute transport, the solute concentration distribution curves resulting from the first and third boundary conditions because of advection predomination are approximately identical. The effect of ion adsorption on the medium's solid matrix is evaluated by retardation factor in the model. The retardation factor greater than one causes retardation in solute transport, distribution and dispersion in the medium. The effect of ion adsorption on solute concentration distribution is independent of the selected boundary condition and depends on the modes of solute transport and dispersion in the medium, so as the rate of this effect in advection – dispersion solute transport is more than in diffusion transport.

**Keywords:** Advection-dispersion transport, Cauchy condition, Dirichlet condition, Porous medium, Retardation factor, Solute transport

### مقدمه

ای به سمت سطح ایستابی در سفره آب زیرزمینی را به روش مدل بندی در یک خاک غیرهمگن شبیه سازی نمود. یاکروبیچ و همکاران (1998) مدل شبه دوبعدی جهت شبیه سازی جریان آب زیر سطحی و انتقال املاح به حالت اشباع و غیراشباع در محیط متخلخل را ارائه نمودند. معادله ریچاردز برای ناحیه غیراشباع در جهت عمودی و معادله دوبعدی جریان آب زیر زمینی در مدل سازی بکار گرفته شد. یه و همکاران (1985) شبیه سازی انتقال آب و املاح در خاک لوم رس را بصورت عددی و میدانی مطالعه نمودند. بدو (1380) انتقال آلاینده-ها به روش پخش و جابجایی در خاکهای دانه ای و ریز را بصورت آزمایشگاهی و نظری مطالعه کرد.

موضوع انتقال جرم در محیط‌های متخلخل تقریباً از دهه پنجاه میلادی قرن اخیر مورد توجه محققان قرار گرفته است و تا حال هر یک از آنها این موضوع را از جنبه های مختلف و به روشهای گوناگون مورد بررسی قرار داده‌اند برخی مطالعات مربوط به بررسی تاثیر فعالیت‌های مختلف میدانی بر پدیده حرکت املاح بوده که در محیط یا آزمایشگاه انجام شده است. برخی نیز از دیدگاه تئوری تلاش‌هایی در ایجاد معادله یا مدل‌هایی برای بیان حرکت املاح در خاک داشته‌اند به عنوان مثال زارع ایبانه (1385) انتقال جرم را در خاک‌های مطبق و غیر مطبق به صورت دینامیک بررسی نمود. تراسی (1992) حرکت آلاینده ها از منابع آلوده کننده غیر نقطه

$$R = \frac{V}{V'} \quad , \quad V' \leq V \quad [1]$$

که  $V$  متوسط سرعت انتقال آب در محیط متخلخل،  $V'$  متوسط سرعت انتقال محلول (آب و جرم) در محیط متخلخل و  $R$  عامل تاخیر است. جذب یونی و عامل تاخیر را می توان در حالت های مختلف بیان نمود. برای حالت جذب خطی هم دما که در این تحقیق مد نظر است روابط زیر ارائه شده است (لیچ و همکاران 1991، و ولوچی 1984).

$$R = 1 + \frac{\rho_b}{n} K_d \quad [2]$$

$$K_d = \frac{S}{C} \quad [3]$$

در روابط فوق،  $S$  غلظت جذب شده، که به صورت جرم ماده شیمیایی به ازاء جرم خاک خشک بیان می شود  $[-]$ ،  $C$  غلظت محلول  $[ML^{-3}]$ ،  $K_d$  ضریب توزیع  $[M^{-1}L^3]$ ،  $r_b$  چگالی ظاهری محیط متخلخل  $[ML^{-3}]$ ،  $n$  تخلخل  $[-]$  و  $R$  عامل تاخیر  $[-]$  می باشد. اگر هیچ اندر کنشی بین محلول و خاک نباشد ( $K_d = 0$ ) مقدار  $R$  برابر یک است (ونگنوختن و پارکر 1984).

مدل تحلیلی انتقال دو بعدی جرم با حضور عامل تاخیر:

معادله انتقال جرم در محیط متخلخل همگن و همسان با جریان ماندگار یک بعدی سیال در جهت  $x$  و با پخش دو بعدی جرم در جهات  $x$  و  $y$  به صورت زیر می باشد (لیچ و دان 1990).

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial t} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad [4]$$

که  $C$  غلظت جرم  $[ML^{-3}]$ ،  $t$  زمان  $[T]$ ،  $V$  سرعت آب یا سرعت دارسی  $[LT^{-1}]$ ،  $x$  و  $y$  موقعیت های طولی محورهای مختصات موازی با جهت جریان و عمود بر آن  $[L]$  و  $D_x$  و  $D_y$  بترتیب ضریب پخش طولی و عرضی  $[L^2T^{-1}]$  هستند که به صورت زیر بیان می شوند.

انتقال و توزیع غلظت جرم در محیط متخلخل می تواند تحت تاثیر عوامل مختلفی نظیر: جذب<sup>1</sup>، فرآیندهای بیولوژیکی، زوال و فساد رادیواکتیوی<sup>2</sup> و... قرار گیرد که در این بین، میزان تاثیر عامل جذب در مقایسه با بقیه عوامل بیشتر می باشد چرا که این پدیده از لحظه شروع توزیع و انتقال غلظت جرم در محیط متخلخل وجود دارد و در انتقال و توزیع انواع جرم در محیط متخلخل حاکم و برقرار است. در حالی که تاثیر بقیه عوامل در بلند مدت مشهود می باشد. در منابع مختلف بررسی های مفصلی در مورد سازوکار تاثیر این عامل در انتقال و توزیع غلظت جرم در انواع محیط های متخلخل پرداخته شده است (لیچ و دان 1990، لیچ و همکاران 1991، و ولوچی 1984). لذا بخاطر اهمیت مسئله جذب یونی، در این مقاله تاثیر این عامل تحت عنوان عامل تاخیر<sup>3</sup> در انتقال و توزیع دو بعدی غلظت بصورت تحلیلی بررسی می شود. این بررسی شامل حل تحلیلی معادله دیفرانسیلی انتقال دو بعدی جرم با احتساب عامل تاخیر با شرایط اولیه و مرزی نوع اول (شرط دیریکله<sup>4</sup>) و نوع سوم (شرط کوشی<sup>5</sup>) می باشد.

## مواد و روشها

عامل تاخیر: ذرات جرم محلول در حین انتقال از محیط متخلخل می تواند جذب سطح ذرات جامد گردد که این فرآیند باعث تاخیر در انتقال و توزیع مواد محلول می گردد. معنی و مفهوم فیزیکی تاخیر عبارتست از اینکه محلول حاوی جرم در مقایسه با آب، به دلیل پخش و جذب توسط ذرات جامد محیط متخلخل چقدر کندتر جابجا می شود به بیان ساده تر می توان نوشت.

<sup>1</sup>Adsorption

<sup>2</sup>Radioactive decay

<sup>3</sup>Retardation factor

<sup>4</sup>Dirichlet

<sup>5</sup>Couchy

برای حل تحلیلی رابطه<sup>7</sup> از شرایط اولیه و مرزی زیر استفاده می شود (شاه محمدی کالاق 1382).

$$C(x, y, \mathbf{0}) = f(x, y), \mathbf{0} < x < \infty, -\infty < y < \infty \quad [8]$$

$$\left( VC - dD_x \frac{\partial C}{\partial x} \right)_{x=0} = \mathbf{0}, \begin{cases} d = \mathbf{0} \\ d = 1 \end{cases}, -\infty < y < \infty, t > \mathbf{0} \quad [9]$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} = \mathbf{0}, -\infty < y < \infty, t > \mathbf{0} \quad [10]$$

$$[11]$$

$$f(x, y) \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow \pm \infty} = \mathbf{0}, \mathbf{0} < x < \infty, t > \mathbf{0}$$

است که پروفیل غلظت را در زمان اولیه نشان می دهد (شکل 1). در شکل مذکور،  $x_1$  و  $x_2$  محدوده پارامتر  $x$  می باشند. رابطه<sup>7</sup> با استفاده از تبدیلات لاپلاس و فوریه (جدول 1) حل می شود.

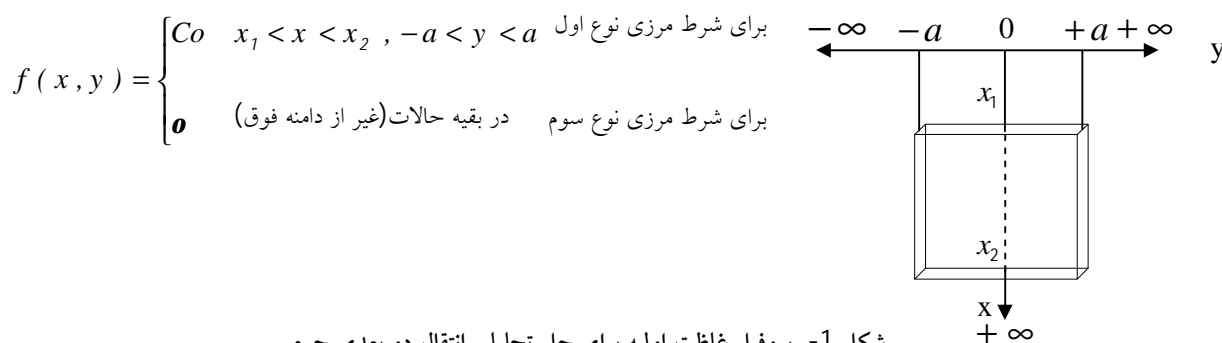
$$D_x = I_L V \quad [5]$$

$$D_y = I_T V \quad [6]$$

که  $I_T$  و  $I_L$  بترتیب قابلیت پخش طولی و عرضی گفته می شوند و مقدار  $I_L$ ، 2 تا 10 برابر  $I_T$  تخمین زده شده است (رنال 2000).

عامل تاخیر بزرگتر از واحد ( $R > 1$ )، ضرایب پخش و سرعت جریان را تحت تاثیر قرار می دهد و پارامترهای مذکور یعنی  $D_x$ ،  $D_y$  و  $V$  در حضور عامل تاخیر به ترتیب به  $\frac{D_x}{R}$ ،  $\frac{D_y}{R}$  و  $\frac{V}{R}$  تبدیل می شوند در نتیجه وجود جذب یونی، جریانهای انتقال توده ای و پخشیدگی جرم با تاثیر ضریب  $R$  کاهش می یابند و چنین بیان می شود که انتقال جرم نسبت به سرعت متوسط آب منفذی به تاخیر می افتد (رنال 2000). بنابراین معادله<sup>4</sup> به صورت زیر درمی آید.

$$R \frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - V \frac{\partial C}{\partial x} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad [7]$$



شکل 1- پروفیل غلظت اولیه برای حل تحلیلی انتقال دو بعدی جرم

جدول 1- تعریف تبدیلات لاپلاس و فوریه (شمس و رضوانی 1370 و وایلی 1986)

تبدیل متغیر	عامل
$C(x, y, t) \rightarrow C'(x, y, p)$	$L_t [ ] = \int_0^{\infty} [ ] \exp(-pt) dt$
$C'(x, y, p) \rightarrow C'^x(s, y, p)$	$L_x [ ] = \int_0^{\infty} [ ] \exp(-sx) dx$
$C'^x(s, y, p) \rightarrow \bar{C}'^x(s, a, p)$	$F_y [ ] = \int_{-\infty}^{\infty} [ ] \exp(ia y) dy$

حل تحلیلی رابطه<sup>7</sup> مطابق با شرایط اولیه و مرزی اعمال شده نهایتاً نتایج زیر را بدست می دهد (روش حل در قسمت ضمیمه آمده است).  
- برای شرط مرزی نوع اول یا شرط دیریکله ( $d = 0$ ):

$$C(x, y, t) = \frac{C_0}{8} \left\{ \operatorname{erfc} \left( \frac{R(x-x_2)-Vt}{(4RD_x t)^{\frac{1}{2}}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{R(x-x_1)-Vt}{(4RD_x t)^{\frac{1}{2}}} \right) + \exp \left( \frac{Vx}{D_x} \right) \times \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{R(x+x_2)+Vt}{(4RD_x t)^{\frac{1}{2}}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{R(x+x_1)+Vt}{(4RD_x t)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \right\} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{y-a}{(4D_y t/R)^{\frac{1}{2}}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{y+a}{(4D_y t/R)^{\frac{1}{2}}} \right) \right]$$

- برای شرط مرزی نوع سوم یا شرط کوشی ( $d = 1$ ):

$$C(x, y, t) = \frac{C_0}{8} \left\{ \exp \left( \frac{Vx}{D_x} \right) \left[ \left( 1 + \frac{V}{D_x} \left( x + x_1 + \frac{Vt}{R} \right) \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{R(x+x_1)+Vt}{(4RD_x t)^{\frac{1}{2}}} \right) - \left( 1 + \frac{V}{D_x} \left( x + x_2 + \frac{Vt}{R} \right) \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{R(x+x_2)+Vt}{(4RD_x t)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] + \operatorname{erfc} \left( \frac{R(x-x_2)-Vt}{(4RD_x t)^{\frac{1}{2}}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{R(x-x_1)-Vt}{(4RD_x t)^{\frac{1}{2}}} \right) + \left( \frac{4V^2 t}{pRD_x} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{Vx}{D_x} \right) \times \left[ \exp \left( -\frac{[R(x+x_2)+Vt]^2}{4RD_x t} \right) - \exp \left( -\frac{[R(x+x_1)+Vt]^2}{4RD_x t} \right) \right] \right\} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{y-a}{(4D_y t/R)^{\frac{1}{2}}} \right) - \operatorname{erfc} \left( \frac{y+a}{(4D_y t/R)^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \quad [13]$$

در روابط فوق  $\operatorname{erfc}$  بیان کننده<sup>۸</sup> تابع مکمل خطاست.

### نتایج و بحث

برای درک بهتر و بیشتر مسئله، توزیع غلظت حاصل از شرایط مرزی نوع اول (رابطه<sup>۱۲</sup>) و نوع سوم (رابطه<sup>۱۳</sup>) با مقادیر  $x_1 = 5\text{cm}$ ,  $x_2 = 20\text{cm}$ ,  $a = 7/5\text{cm}$  در غلظت اولیه (شکل 1)، برای دو حالت (الف): انتشار<sup>۱</sup> یعنی جریانی در محیط متخلخل وجود نداشته باشد

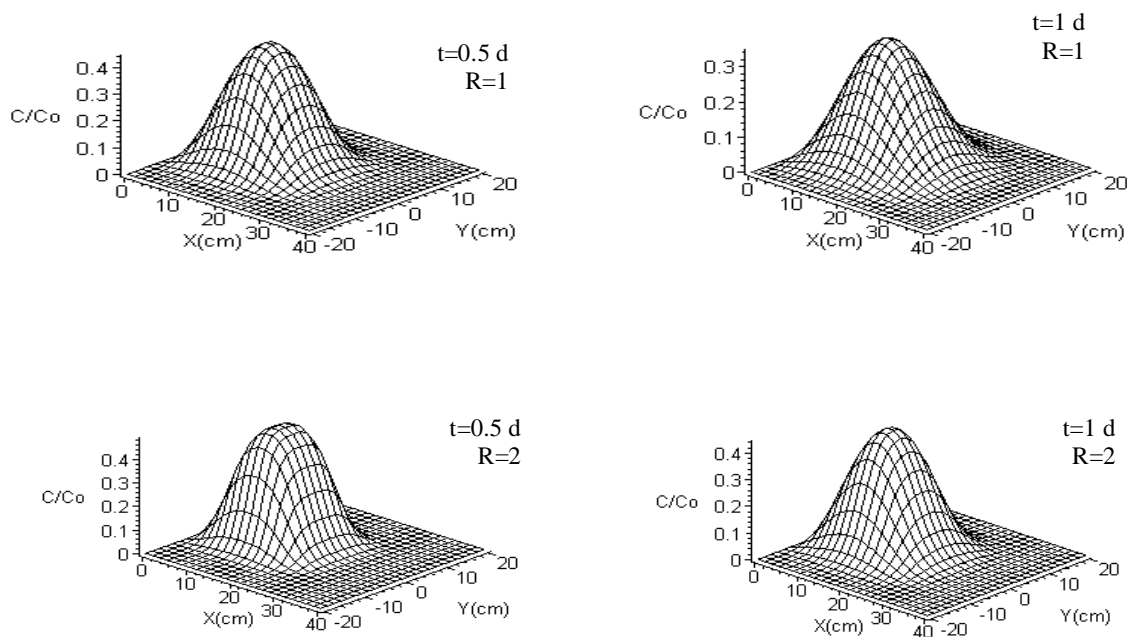
( $V=0$ ) و (ب) انتقال توده ای - پخش<sup>۲</sup> یعنی جریان در محیط متخلخل برقرار باشد ( $V \neq 0$ ) به ترتیب در شکل های 3,2 و 4 مشخص شده است. توزیع غلظت جرم حاصل از شرط مرزی نوع اول و شرط مرزی نوع سوم، با ضرایب پخش  $D_x=2$  و  $D_y=2$  سانتی متر مربع بر روز در مدت زمانهای 0/5 و 1 روز و با  $R_1=1$

<sup>2</sup> Advection-dispersion

<sup>1</sup> Diffusion

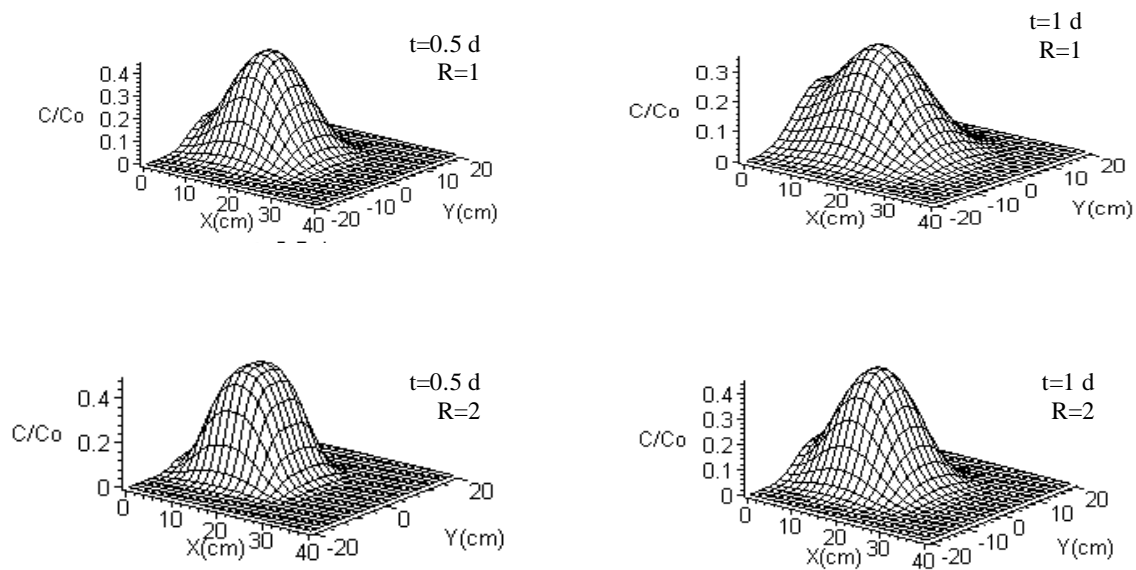
مشابه 0/5 و 1 روز و با مقادیر  $R_1=1$  و  $R_2=2$  در حالت انتقال توده‌ای - پخش نشان می‌دهد که منحنی-های توزیع غلظت جرم برای هر دو نوع شرط مرزی، به دلیل غالب بودن انتقال توده‌ای، تقریباً یکسان می‌باشد. در این حالت نیز مشابه حالت قبلی، تاثیر عامل تاخیر بر توزیع غلظت جرم، بصورت تاخیر در کاهش غلظت جرم (محور Z) و تاخیر در انتقال و پخش جرم در عمق (محور X) و فاصله عرضی (محور Y) مشخص می‌باشد. میزان این تاثیر در این حالت، بخصوص در عمق چشمگیر می‌باشد.

و  $R_2=2$  در حالت انتشار، به ترتیب در شکل‌های 3 و 2 مشخص می‌باشد که تاثیر جذب یونی (یا عامل تاخیر) بر توزیع غلظت جرم، (محور  $C/C_0$ ) و تاخیر در پخش و پیشروی جرم در عمق (محور X) و نیز در فاصله عرضی (محور Y) به خوبی مشهود می‌باشد. تنها اختلاف و تفاوت شکل‌های مذکور به توزیع غلظت جرم در مرز یا سطح خاک ( $x=0$ ) مربوط می‌شود که شرط مرزی نوع سوم بر خلاف شرط مرزی نوع اول، مقدار غلظت را صفر نشان نمی‌دهد و این اختلاف مطابق تعریف شرایط مرزی نوع اول و نوع سوم در مرز (رابطه 9) قابل توجیه است. شکل 4 توزیع غلظت جرم حاصل از شرایط مرزی نوع اول و نوع سوم، با ضرایب پخش  $D_x=5D_y=50\text{cm}^2/d$  در مدت زمان‌های



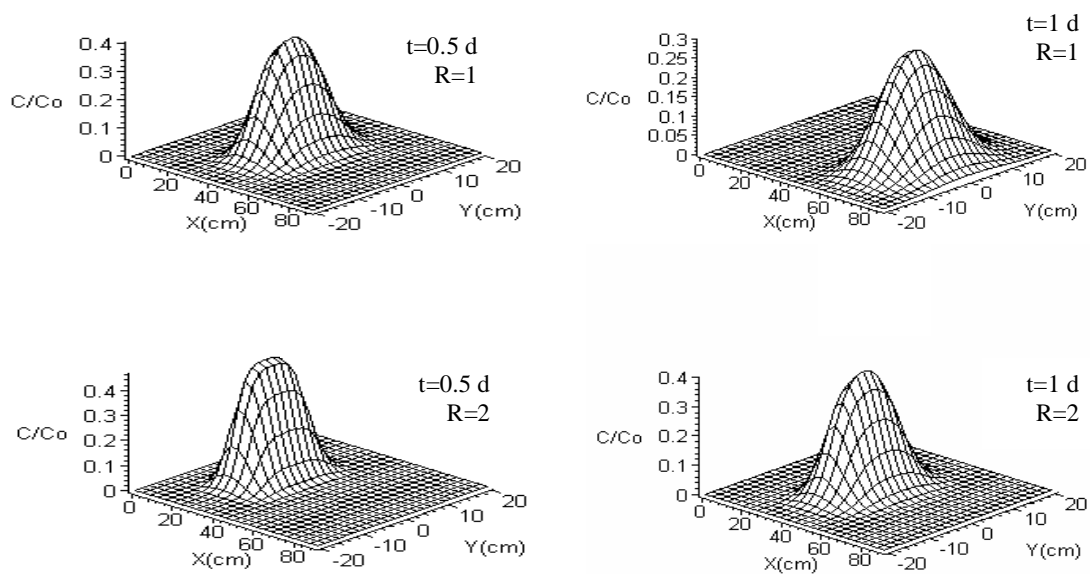
شکل 2- تاثیر عامل تاخیر بر توزیع غلظت حاصل از شرط مرزی نوع اول (شرط دیریکله) در حالت انتشار، با

$$V=0, C_0=1 \text{ مقادیر:}$$



شکل 3- تاثیر عامل تاخیر بر توزیع غلظت حاصل از شرط مرزی نوع سوم (شرط کوشی) در حالت انتشار، با

مقادیر:  $V=0$ ,  $C_0=1$



شکل 4- تاثیر عامل تاخیر بر توزیع غلظت حاصل از شرایط مرزی نوع اول و نوع سوم در حالت انتقال توده ای - پخش، با

مقادیر:  $V=50\text{cm/d}$ ,  $C_0=1$

## نتیجه گیری

اول و نوع سوم به دلیل غالب بودن انتقال توده‌ای تقریباً یکسان می‌باشد.

۵- تاثیر جذب یونی بر توزیع غلظت جرم مستقل از نوع شرط مرزی انتخابی می‌باشد و میزان این تاثیر برای هر دو نوع شرط مرزی یکسان و برابر می‌باشد.

۶- تاثیر جذب یونی بر توزیع غلظت جرم به حالت‌های انتقال و پخش جرم در محیط متخلخل بستگی دارد به طوریکه این تاثیر در انتقال میزان جرم بصورت انتقال توده ای - پخش در مقایسه با حالت انتشار به مراتب بیشتر می‌باشد.

نتایج را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود:

۱- جذب یونی در سطح ذرات جامد خاک باعث تاخیر و کندی در پیشروی و پخش غلظت جرم هم در فاصله طولی و هم در فاصله عرضی می‌شود.

۲- با افزایش زمان، تاثیر جذب یونی و یا عامل تاخیر نیز افزایش می‌یابد.

۳- در انتقال جرم به صورت انتشار، شرط مرزی نوع سوم (شرط کوشی) توزیع غلظت جرم را در مرز یا سطح خاک بیشتر از شرط مرزی نوع اول نشان می‌دهد.

۴- در انتقال جرم به صورت انتقال توده‌ای - پخش، منحنی‌های توزیع غلظت حاصل از شرایط مرزی نوع

## ضمیمه:

(روش حل تحلیلی رابطه انتقال جرم (۷)) (شاه محمدی کلالق ۱۳۸۲)

از معادله ۷ به ترتیب نسبت به  $t$  و  $x$  تبدیل لاپلاس گرفته، شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم.

$$R(pC'^x - f^x) = D_x \left[ s^2 C'^x - (1-d) \frac{\partial \bar{C}'}{\partial x}(\mathbf{o}, y, p) - dsC'(\mathbf{o}, y, p) \right] - VC'^x s \quad [1-f]$$

$$+ D_y \frac{\partial^2 C'^x}{\partial y^2}$$

$$\frac{dC'^x}{dy} \Big|_{y \rightarrow \infty} = 0 \quad [2-f]$$

تبدیل فوریه رابطه ۱-الف نسبت به  $y$ ، مطابق شرط مرزی ۲-الف به دست می‌دهد.

$$\bar{C}'^x(s, \alpha, p) = \frac{1}{(s+A)^2 - B^2} \left\{ (1-\delta) \frac{d\bar{C}'}{dx}(\mathbf{o}, \alpha, p) + \delta s \bar{C}'(\mathbf{o}, \alpha, p) - \frac{Rf^x}{D_x} \right\} \quad [3-f]$$

که:

$$A = -V / 2D_x \quad [4-f]$$

$$B = [A^2 + (a^2 D_y + pR) D_x]^{1/2} \quad [5-f]$$

برای محاسبه  $C(x, y, t)$ ، از رابطه ۳-الف نسبت به  $x$  معکوس تبدیل لاپلاس گرفته می‌شود.



$$\bar{C}'(x, \alpha, p) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+A)^2 - B^2} (1-\delta) \frac{d\bar{C}'}{dx}(\alpha, p) + \frac{s}{(s+A)^2 - B^2} \delta \bar{C}'(\alpha, p) - \frac{1}{(s+A)^2 - B^2} \cdot \frac{R \bar{f}^x}{D_x} \right\} \quad \text{[الف-6]}$$

رابطه<sup>۶</sup> فوق از سه جمله تشکیل شده است لذا معکوس تبدیل لاپلاس هر کدام به صورت زیر در می آید:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+A)^2 - B^2} (1-d) \frac{d\bar{C}'}{dx}(\alpha, p) \right\} = \exp(-Ax) \cdot \frac{\text{Sinh}(Bx)}{B} \quad \text{[الف-7]}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+A)^2 - B^2} \cdot d\bar{C}'(\alpha, p) \right\} = \left[ \exp(-Ax) \cosh(Bx) - \frac{A}{B} \exp(-Ax) \sinh(Bx) \right] \times d\bar{C}'(\alpha, p) \quad \text{[الف-8]}$$

برای محاسبه<sup>۶</sup> معکوس تبدیل لاپلاس سومین جمله<sup>۶</sup> رابطه (الف-۶) از قضیه پیچشی<sup>۱</sup> در تبدیل لاپلاس به صورت زیر استفاده می شود.

$$L^{-1} [h(s).k(s)] = h * k = \int_0^x k(x)h(x - \zeta)d\zeta \quad \text{[الف-9]}$$

$h(s)$  و  $k(s)$  بترتیب تبدیلات لاپلاس  $k(x)$  و  $h(x)$  بوده و  $Z$  نیز متغیر اختیاری می باشد.

$$h(s) = \frac{1}{(s+A)^2 - B^2} \rightarrow h(x) = \exp(-Ax) \frac{\sinh(Bx)}{B} \quad \text{[الف-10]}$$

$$k(s) = \frac{R}{D_x} \bar{f}^x \rightarrow k(x) = \frac{R}{D_x} \bar{f}(z, a) \quad \text{[الف-11]}$$

$$\sinh[B(x-\zeta)]d\zeta L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+A)^2 - B^2} \frac{R \bar{f}^x}{D_x} \right\} = \frac{R}{BD_x} \int_0^x [\bar{f}(\zeta, \alpha)] \exp[-A(x-\zeta)] \quad \text{[الف-12]}$$

بنابراین رابطه<sup>۶</sup> الف-۶ به صورت زیر در می آید.

$$\bar{C}'(x, a, p) = \frac{1}{B} \exp(-Ax) \sinh(Bx) \left[ (1-d) \frac{d\bar{C}'}{dx}(\alpha, p) \right] + \frac{1}{B} \exp(-Ax) \times [B \cosh(Bx) - A \sinh(Bx)] d\bar{C}'(\alpha, p) - \frac{R}{BD_x} \int_0^x [\bar{f}(z, a)] \exp[-A(x-z)] \sinh[B(x-z)] dz \quad \text{[الف-13]}$$

در رابطه<sup>۶</sup> فوق بایستی مقادیر  $\frac{d\bar{C}'}{dx}(\alpha, p)$  ,  $\bar{C}'(\alpha, p)$  مشخص گردند بنابراین چنانچه از رابطه<sup>۶</sup> الف-۱۳ نسبت به  $x$  مشتق گرفته و طرفین رابطه را به  $2B \exp[(A-B)x]$  ضرب و از فرم توانی  $\sinh$  و  $\cosh$  استفاده شود مطابق با شرط مرزی (رابطه ۱۰) حاصل می شود.

$$\{B-A\} (1-d) \frac{d\bar{C}'}{dx}(\alpha, p) + \{(B^2 + A^2) - 2AB\} d\bar{C}'(\alpha, p) + \frac{R}{D_x} \times \int_0^\infty [\bar{f}(z, a)] \exp(Az) \{ \exp(-Bz) [A-B] \} dz = 0 \quad \text{[الف-14]}$$

با تقسیم طرفین رابطه فوق به  $[B-A]$ ، به ترتیب برای شرط مرزی نوع اول ( $d = 0$ ) و شرط مرزی نوع سوم ( $d = 1$ ) خواهیم داشت.

$$\frac{d\bar{C}'}{dx}(\mathbf{0}, \mathbf{a}, p) = \frac{R}{D_x} \int_0^\infty \bar{f}(z, \mathbf{a}) \exp[z(A-B)] dz \quad [15-الف]$$

$$\bar{C}'(\mathbf{0}, \mathbf{a}, p) = \frac{R}{(B-A)D_x} \int_0^\infty (\bar{f}(z, \mathbf{a}) +) \exp[z(A-B)] dz \quad [16-الف]$$

با جایگزینی روابط ۱۵-الف و ۱۶-الف در رابطه ۱۳-الف و استفاده از فرم توانی sinh و cosh حاصل می‌شود.

$$\bar{C}'(x, \mathbf{a}, p) = \frac{\exp[-x(A-B)]}{2BD_x} \int_0^\infty R\bar{f}(z, \mathbf{a}) \exp[z(A-B)] dz + \frac{\exp[-x(A+B)]}{2BD_x} \quad [17-الف]$$

$$\left\{ \int_0^\infty R\bar{f}(z, \mathbf{a}) \exp[z(A+B)] dz + d \frac{B+A}{B-A} - (1-d) \int_0^\infty (R\bar{f}(z, \mathbf{a}) \exp[z(A-B)]) dz \right\}$$

با استفاده از جدول تبدیلات لاپلاس، قضیه پیچشی در تبدیلات لاپلاس و جایگزینی مقادیر  $A$  و  $B$  از روابط ۴-الف و ۵-الف، معکوس تبدیل لاپلاس رابطه ۱۷-الف نسبت به  $t$  به صورت زیر در می‌آید (وایلی ۱۹۸۶).

$$\begin{aligned} \bar{C}'(x, \mathbf{a}, t) = \int_0^\infty \bar{f}(z, \mathbf{a}) & \left[ (1-d) \exp\left(-\frac{Rz^2 + 2Vzt}{4D_x t}\right) \sinh\left(\frac{Rzx}{2D_x t}\right) \left(\frac{R}{4pD_x t}\right)^{\frac{1}{2}} \times \exp\right. \\ & \left(-\frac{Rx^2 - 2Vxt}{4D_x t} - (V^2 + \frac{a^2 D_y}{R})t\right) + 2d \exp\left(-\frac{Rz^2 + 2Vzt}{4D_x t}\right) \cosh\left(\frac{Rzx}{2D_x t}\right) \left(\frac{R}{4pD_x t}\right)^{\frac{1}{2}} \times \exp \\ & \left(-\frac{Rx^2 - 2Vxt}{4D_x t} - (V^2 + \frac{a^2 D_y}{R})t\right) \right] dz - d \int_0^\infty \bar{f} \frac{V}{2D_x} \exp\left(-\frac{V^2 t + 4RVx}{4RD_x} - (V^2 + \frac{a^2 D_y}{R})t\right) \\ & \operatorname{erfc} \left[ \frac{R(x+z) + Vt}{(4RD_x t)^{\frac{1}{2}}} \right] dz \quad [18-الف] \end{aligned}$$

مشابه حالت قبلی با استفاده از جدول تبدیلات فوریه و قضیه پیچشی در تبدیلات فوریه، معکوس تبدیل فوریه رابطه ۱۸-الف نسبت به  $y$  محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} C(x, y, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty & \left\{ \frac{R}{4\pi t(D_y)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{RV^2}{4D_y t}\right) f(\zeta, y - V) \times \left[ \left(\frac{R}{\pi D_x t}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{(Rx - Vt)^2}{4RD_x t}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{Rz^2 + 2Vzt}{4D_x t} \right) \left( (1-d) \sinh\left(\frac{Rzx}{2D_x t}\right) + d \operatorname{Cosh}\left(\frac{Rzx}{2D_x t}\right) \right) - d \frac{V}{2D_x} \times \exp\left(\frac{Vx}{D_x}\right) \right. \\ & \left. \operatorname{erfc} \left( \frac{R(x+z) + Vt}{(4RD_x t)^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} dV dz \quad [19-الف] \end{aligned}$$

با جایگزینی برای شرط مرزی نوع اول و ( $d = 0$ ) برای شرط مرزی نوع سوم و محاسبه انتگرال‌ها، در نهایت روابط ۱۲ و ۱۳ حاصل می‌شوند.

## منابع مورد استفاده

- بدو ک، ۱۳۸۰. مطالعه آزمایشگاهی و نظری انتقال آلودگی به روش پخش و جابجایی با حرکت و پخش در خاکهای دانه‌ای و ریز. مجله دانشکده فنی، دانشگاه تبریز.
- زارع ابیانه ح، ۱۳۸۵. "دینامیک انتقال جرم در خاکهای مطبق و غیر مطبق. پایان نامه دکتری، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تبریز.
- شاه محمدی کلایق ش، ۱۳۸۲. "بررسی تحلیلی انتقال جرم در محیطهای متخلخل." پایاننامه کارشناسی ارشد. دانشکده کشاورزی، دانشگاه تبریز.
- شمس ب و رضوانی م، ۱۳۷۰. "ریاضیات پیشرفته."، انتشارات منصوری.
- Leij FJ and Dane JH ,1990. Analytical solution of one-dimensional advection equation and two or three dimensional dispersion equation. *Water Resour. Res.* 26: 1475-1482.
- Leij FJ, Skaggs TH and Van Genuchten MT, 1991. "Analytical solution for solute Transport in three-dimensional semi-infinite porous media." *Water Resour. Res.* 27:2719-2733.
- Randall CJ, 2002. *Ground Water Hydraulics and Pollutant Transport*. Prentice Hall. Univ of Texas.
- Tracy JC, 1992. Movement of nonpoint-source contaminants through heterogeneous soils. *Journal of Irrigation and Drainage Eng.* ASCE 118: 88-103.
- Valocchi J, 1984. Describing the transport of ion-exchanging contaminant using an effective  $K_d$  approach. *Water Resour. Res.* 20:499-503.
- Van Genuchten MT and Parker JC, 1984. Boundary condition for displacement experiments through short laboratory soil columns. *Soil Sci. Soc, Am J*, 48:703-708.
- Wylie CR, 1986. *Advanced Engineering Mathematics*. Mc Graw-Hills. New York.
- Yakirevich, A., Borisov, V. and Sorek, S. 1998. A quasi three-dimensional model for flows and transport in unsaturated and saturated zones, 1. Implementation of quasi two dimensional case. *Advances in Water Resour.* 21: 679-689.
- Yeh TCJ, Gelhar L and Gutjahr AL, 1985. Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogenous soil, 3: observation and application. *Water Resour. Res.* 21: 465-471.

$$t=1 \text{ d}$$

$$R=1$$